Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie II (Flächentheorie) WS 2013/2014
Blatt 6

Aufgabe 6.1 (3+2+5=10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für eine parametrisierte Fläche stets $K \leqslant H^2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Hauptkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) $\varkappa_{1,2}$ einer parametrisierten Fläche gemäß der Formel

$$\varkappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

berechnen lassen.

(c) Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) eines Kreistorus.

Aufgabe 6.2 (1+4+7=12 Punkte)

Gegeben sei eine Fläche $X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der Form

$$X(u, v) = (h(u) \cos(v), h(u) \sin(v), k(u)),$$

wobei $h : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k : I \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $h'^2 + k'^2 \equiv 1$ seien.

(a) Was bedeutet die Bedingung $h'^2 + k'^2 \equiv 1$ geometrisch? Stellt diese Bedingung eine Einschränkung dar?

(b) Bestimmen Sie die Weingarten-Abblidung zu X. Berechnen Sie die Hauprkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) und zeigen Sie, dass für die Gauß-Krümmung K von X gilt:

$$K = -\frac{h''}{h}.$$

(c) Charakterisieren Sie die Fläche in den Fällen $K \equiv 0$ und $K \equiv 1$.

(Bitte wenden)

Aufgabe 6.3 (5 Punkte)

Betrachten Sie die durch die Vorschrift $X : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u,v) = \left((1 + v\cos\frac{u}{2})\cos u, (1 + v\cos\frac{u}{2})\sin u, v\sin\frac{u}{2}\right),$$

definierte parametrisierte Fläche (*Möbiusband*).

a) Zeigen Sie, dass für die Gauß-Krümmung K gilt:

$$K = -\left(\frac{2}{v^2 + 4(1 + v\cos\frac{u}{2})^2}\right)^2.$$

Abgabe: Mittwoch 4.12.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5