Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie II (Flächentheorie) WS 2013/2014
Blatt 7

Aufgabe 7.1 (6 Punkte)

Geben Sie die Definition der sogenannten parabolischen Punkte einer Fläche und recherchieren Sie die Begriffe „Asymptotenlinie“ und „Geodätische“ auf einer Fläche.

Aufgabe 7.2 (3x4=12 Punkte)

Betrachten Sie die durch die Parametrisierung $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + (h(v), 0, v)\,,$$

gegebene Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion sei.

a) Skizzieren Sie die Fläche in den Fällen $h \equiv 0$ und $h(v) = v^2$.

b) Zeigen Sie, dass es sich um eine parametrisierte Fläche handelt und bestimmen Sie die Gauß-Abbildung.

c) Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung $K = K(u, v)$ von X gegeben ist durch

$$K = -\frac{h''(v)\cos u}{\left(1 + h'(v)^2 \cos^2 u\right)^2}.$$

Bestimmen Sie ferner den geometrischen Ort der parabolischen Punkte von X im Fall $h(v) = v^2$.

d) Unter welchen Bedingungen sind die Koordinatenkurven $t \to X(u, t)$ ($u \in (0, 2\pi)$ fest) Asymptotenlinien von X? Sind diese Kurven unter jenen Bedingungen auch Geodätische?

(Bitte wenden)

Aufgabe 7.3 (4x3=12 Punkte)

Seien $\varepsilon > 0$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine reguläre Fläche mit mittlerer Krümmung H und Gauß-Krümmung K, so dass $1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2 > 0$ ist. Die Fläche $\widehat{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$\widehat{X}(u,v) = X(u,v) + \varepsilon N(u,v)$$

heißt Parallelfläche zu X. Dabei bezeichnet N die Gauß-Abbildung von X. Zeigen Sie:

a) Auf Ω gilt
$$\widehat{X}_u \times \widehat{X}_v = (1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2) X_u \times X_v,$$
und die Gauß-Abbildung von $\widehat{X}$ stimmt mit der von X überein.

b) Bezeichnen S_ω und $\widehat{S}_\omega$ die Weingarten-Abbildungen von X bzw. $\widehat{X}$ zu einem fixierten Parameterpunkt $\omega = (u,v) \in \Omega$, so gilt:
$$\widehat{S}_\omega \left(D\widehat{X}_\omega \circ (DX)^{-1}_\omega (U) \right) = S_\omega(U)$$
für alle Vektoren U aus der Tangentialebene $T_\omega X$ von X bei ω.

c) Bezeichnen κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen von X, so sind die Hauptkrümmungen $\widehat{\kappa}_1$, $\widehat{\kappa}_2$ von $\widehat{X}$ gegeben durch
$$\widehat{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{1 - \varepsilon\kappa_1} \quad \text{und} \quad \widehat{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{1 - \varepsilon\kappa_2}.$$
(*Hinweis:* Verwenden Sie Teil b)).

Abgabe: Mittwoch 18.12.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5