Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)

Blatt 11- Musterlösung

Aufgabe 11.1

a) $l = 6\,m$, $A = 3\,m^2$

Isoperimetrische Ungleichung:

$$4\pi A \leq l^2$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot 6 &\leq 6^2 \\ \Leftrightarrow 12 \cdot \pi &\leq 36 \quad \lightning \end{aligned}$$

b) Sei α der Kreisbögen von A nach B, β der Kreisbogen von B nach A und c eine allgemeine Kurve von A nach B. Alle Kurven seien positiv orientiert und r sei der Radius der Kreisbögen.
O.E.: $L(c) = l$, $L(\alpha) = l$, $K = \alpha \oplus \beta$

$$\begin{aligned} L(K) &= 2\pi r \\ L(\beta) &= L(K) - L(\alpha) \\ &= 2\pi r - l \\ L(c \oplus \beta) &= L(c) + L(\beta) \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Isoperimetrische Ungleichung:

$$A\left(c \oplus \beta\right) \leq \frac{1}{4\pi}\left(L\left(c \oplus \beta\right)\right)^2 = \pi r^2$$

Aufgabe 11.2

$\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ $(L > 0)$, nach Bogenlänge parametrisiert, geschlossen, konvex, positiv orientiert $\Rightarrow I_\alpha = 1$
$\beta : [0, L] \to \mathbb{R}^2, \quad \beta(s) := \alpha(s) - r n_\alpha(s)$

a)

$$
\begin{aligned}
\beta'(s) &= \alpha'(s) - r \underbrace{n'_\alpha(s)}_{n'_\alpha = -\kappa_\alpha t} \\
&= \alpha'(s) + r\kappa_\alpha \alpha'(s) \\
&= \alpha'(s)\left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)
\end{aligned}
$$

Berechnung der Bogenlänge:

$$
\begin{aligned}
U(\beta) = \int_0^L \left|\beta'(s)\right| \,\mathrm{d}s &= \int_0^L \left|\alpha'(s)\left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\right| \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^L \underbrace{\left|\alpha'(s)\right|}_{=1} \cdot \left|1 + r\kappa_\alpha(s)\right| \,\mathrm{d}s \\
&= \underbrace{\int_0^L 1 \,\mathrm{d}s}_{=L} + r \underbrace{\int_0^L \kappa_\alpha(s)\,\mathrm{d}s}_{=2\pi I_\alpha} \\
&= U(\alpha) + 2\pi r
\end{aligned}
$$

b)

$$
\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} \left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\alpha'_1 \\ \left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\alpha'_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\beta) &= \frac{1}{2}\int_0^L \beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1 \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \beta_1\left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\alpha'_2 - \beta_2\left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\alpha'_1 \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\cdot\left(\beta_1\alpha'_2 - \beta_2\alpha'_1\right) \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha'_2 \\ -\alpha'_1 \end{pmatrix}}_{=-n_\alpha(s)} \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\left(\alpha - rn_\alpha(s)\right)\cdot\left(-n_\alpha(s)\right) \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left(1 + r\kappa_\alpha(s)\right)\left(-\alpha \cdot n_\alpha(s) + r\right) \,\mathrm{d}s \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \alpha(-n_\alpha(s))\,\mathrm{d}s}_{①} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L r\,\mathrm{d}s}_{②} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L r^2\kappa_\alpha(s)\,\mathrm{d}s}_{③} \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^L \alpha n_\alpha(s)\cdot r\kappa_\alpha(s)\,\mathrm{d}s}_{④}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{①} &= \frac{1}{2}\int_0^L \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_2'\\ \alpha_1'\end{pmatrix}\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \alpha_1\alpha_2' - \alpha_1\alpha_2'\,\mathrm{d}s\\
&= A(\alpha)\\
\text{②} &= \frac{1}{2}Lr\\
\text{③} &= \frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi\\
&= \pi r^2\\
\text{④} &= -\frac{1}{2}r\int_0^L \alpha\cdot\alpha''\,\mathrm{d}s\\
&\overset{\text{p.I.}}{=} -\frac{1}{2}r\left(\left[\underbrace{\alpha\cdot\alpha'}_{=0}\right]_0^L - \int_0^L \underbrace{\alpha'\cdot\alpha'}_{=1}\,\mathrm{d}s\right)\\
&= \frac{1}{2}Lr\\
\Rightarrow\quad A(\beta) &= A(\alpha) + Lr + \pi r^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.3

$\alpha : [a,b]\to\mathbb{R}^2 \quad (a,\ b\in\mathbb{R},\quad a<b);\quad \alpha(t) := (x(t),y(t));\quad A=\alpha(a),\ B=\alpha(b)$
stetig differenzierbarer Weg, positiv orientiert, keine Doppelpunkte

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha(t), & t \in (a,b) \\ (1+t-a)\alpha(a), & t \in (a-1,a) \\ (1-t+b)\alpha(b), & t \in (b,b+1) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ lokal Lipschitz-stetig $\rightarrow$ Satz von Gauß kann angewendet werden

$$\bar{\alpha'} = \begin{cases} \alpha'(t), & t \in (a,b) \\ \alpha(a), & t \in (a-1,a) \\ -\alpha(b), & t \in (b,b+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{t}_\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, & t \in (a,b) \\ \frac{\alpha(a)}{|\alpha(a)|}, & t \in (a-1,a) \\ -\frac{\alpha(b)}{|\alpha(b)|}, & t \in (b,b+1) \end{cases}$$

$$\text{Inneres Normalenfeld: } N_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{|\alpha'|}(-y',x'), & t \in (a,b) \\ \frac{1}{|\alpha'|}(-y(a),x(a)), & t \in (a-1,a) \\ \frac{1}{|\alpha'|}(y(b),-x(b)), & t \in (b,b+1) \end{cases}$$

$$\int \text{div } F(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int N_\alpha(u,v)\cdot F(u,v)\mathrm{d}H^{n-1}$$

$$\text{Wähle} F(u,v) = \frac{1}{2}(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \text{div } F \equiv 1$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow A(S) &= \int \mathrm{d}x(t)\mathrm{d}y(t) \\
&= \int \text{div } F(x(t),y(t))\,\mathrm{d}x(t)\mathrm{d}y(t) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{a-1}^a \begin{pmatrix} x(a) \\ -y(a) \end{pmatrix}(1+t-a)\begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} \mathrm{d}t}_{=0} + \\
&\quad \underbrace{\frac{1}{2}\int_b^{b+1} \begin{pmatrix} -y(b) \\ x(b) \end{pmatrix}(1-t+b)\begin{pmatrix} x(b) \\ y(b) \end{pmatrix}}_{=0} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b y'(t)x(t) - x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$