Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 4

Aufgabe 4.1. (4+4=8 Punkte)

Zeigen Sie, dass Normale n and Binormale b einer beliebigen (nicht notwendig nach der Länge parametrisierten) regulären Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) mit nirgends verschwindender Krümmung gegeben sind durch

$$n = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''||\alpha'|} \times \alpha', \qquad b = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}.$$

Sie dürfen dabei ohne Beweis die Formel

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u$$

für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ benutzen.

(*Hinweis:* Betrachten Sie die zu α gehörige, nach der Länge umparametrisierte, Kurve und benutzen Sie die Formeln aus Aufgabe 3.2, Blatt 3).

Aufgabe 4.2. (5+5=10 Punkte)

Berechnen Sie Normale n und Binormale b folgender Kurven $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

(a) $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

(b) $\beta(t) = \left(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}\right)$

(Bitte wenden)

Aufgabe 4.3. (5 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine reguläre ebene Kurve, deren orientierte Krümmung $\varkappa$ nirgends verschwindet. Die Kurve $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\beta(s) := \alpha(s) + \frac{n(s)}{\varkappa(s)}$$

heißt die *Evolute* von α. Zeigen Sie, dass die Tangenten von β und α in jedem Punkt senkrecht sind.

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer beliebigen, regulären ebenen Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit $\alpha(t) := (x(t), y(t))$ gegeben ist durch

$$\varkappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Abgabe: Mittwoch, 22.05.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.