Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 7

Aufgabe 7.1. (10 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ eine Intervall) eine nach der Länge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ. Es seien $\varkappa \neq 0$, $\varkappa' \neq 0$ und $\tau \neq 0$. Die Funktionen $\varkappa$ und τ müssen auf I der Gleichung

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^2 + \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)^2 = r^2$$

genügen, wobei $r > 0$ eine Konstante ist.

Zeigen Sie: α liegt auf einer Sphäre mit Radius r.

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Kurve

$$\beta(s) := \alpha(s) + \frac{1}{\varkappa(s)} n_\alpha(s) + \frac{\varkappa'(s)}{\varkappa^2(s)\tau(s)} b_\alpha(s), \qquad s \in I,$$

wobei $(t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha)$ das Frenet-Dreibein von α bezeichnet.)

Aufgabe 7.2. (4+4=8 Punkte)

Sei $I = [s_0, s_1]$ ein Intervall und $\varkappa : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine nach der Länge parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, deren orientierte Krümmung $\varkappa_\alpha$ gleich $\varkappa$ ist.

b) Ist $\alpha_0 \in \mathbb{R}^2$ gegeben und hat man dazu eine positiv orientierte ONB (t_0, n_0) von Vektorn aus $\mathbb{R}^2$ fixiert, so gibt es eine nach der Länge parametrisierte Kurve mit orientierter Krümmung $\varkappa$, welche die Anfangsbedingung

$$\alpha(s_0) = \alpha_0, \quad t(s_0) = t_0, \quad n(s_0) = n_0$$

erfüllt.

(Bitte wenden)

Aufgabe 7.3. (10 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve mit α'' stets ungleich 0 und sei S eine (3×3)-orthogonale Matrix, (das heißt $S^\top = S^{-1}$ ist die Inverse).

Zeigen Sie, dass die Kurven α und alle eigentlichen Bewegungen $S\alpha + c$, $c \in \mathbb{R}^3$ dieselben Krümmungen und Torsionen haben.

Abgabe: Mittwoch, 19.06.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.