Blatt 10 Lösung

Aufgabe 1

- III_w ist offensichtlich bilinear. Wir zeigen nun noch Symmetrie:

$u, v \in T_w X \Rightarrow u = DX \cdot \tilde{u},\ v = DX \cdot \tilde{v}$ mit $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{III}_w(u,v) = S_w(u) \cdot S_w(v) = DN_w DX_w^{-1} u \cdot DN_w DX_w^{-1} v$$
$$= DN_w \tilde{u} \cdot DN_w \tilde{v} = \tilde{u}^T DN_w^T DN_w \tilde{v}$$
$$= \tilde{u}^T \underbrace{(DN_w^T DN_w)}_{\text{symmetrische Matrix!}} \tilde{v} = \tilde{v}^T (DN_w^T DN_w) \tilde{u}$$
$$= S_w(v) \cdot S_w(u) = \mathrm{III}_w(v,u).$$

- Es sei x, y eine ONB aus Eigenvektoren von S_w von $T_w X$,

also $S_w x = \varkappa_1(w) x,\quad S_w y = \varkappa_2(w) y$.

$u = \alpha_u x + \beta_u y,\quad v = \alpha_v x + \beta_v y$.

Dann gilt: $\mathrm{III}_w(u,v) - (\varkappa_1 + \varkappa_2)\mathrm{II}_w(u,v) + \varkappa_1(w)\varkappa_2(w) \mathrm{I}_w(u,v)$

$$= S_w(\alpha_u x + \beta_u y) \cdot S_w(\alpha_v x + \beta_v y) - (\varkappa_1 + \varkappa_2) S_w(\alpha_u x + \beta_u y) \cdot (\alpha_v x + \beta_v y)$$
$$+ \varkappa_1 \varkappa_2 (\alpha_u x + \beta_u y) \cdot (\alpha_v x + \beta_v y)$$

$$= \varkappa_1^2 \alpha_u \alpha_v + \varkappa_2^2 \beta_u \beta_v - (\varkappa_1 + \varkappa_2)(\alpha_u \varkappa_1 \alpha_v + \beta_u \beta_v \varkappa_2)$$
$$+ \varkappa_1 \varkappa_2 (\alpha_u \alpha_v + \beta_u \beta_v) = 0. \ \square$$

Aufgabe 2

Es gilt: $|X_u \times X_v|^2 = EF - g = \det G$

$$\int_\Omega |X_u \times X_v| \, du\,dv = \int_\Omega \sqrt{\det G(u,v)} \, du\,dv$$

$$\overset{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det G(\varphi(u,v))} \; |\det D\varphi(u,v)| \, d\tilde u \, d\tilde v$$

Weiter gilt:

$G = DX^T \cdot DX \quad , \tilde G = D\tilde X^T \cdot D\tilde X \quad$ mit $\tilde X = X \circ \varphi$

$$D\tilde X = DX \circ \varphi \cdot D\varphi$$

$$\Rightarrow \tilde G = (DX \circ \varphi \cdot D\varphi)^T \, DX \circ \varphi \cdot D\varphi$$

$$= D\varphi^T \, (DX \circ \varphi)^T \, DX \circ \varphi \cdot D\varphi$$

$$= D\varphi^T \, G \circ \varphi \cdot D\varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det G(\varphi(u,v))} \, |\det D\varphi(u,v)| \, d\tilde u \, d\tilde v$$

$$= \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det D\varphi(u,v)^2 \det G(\varphi(u,v))} \, d\tilde u \, d\tilde v$$

$$= \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det(D\varphi^T) \cdot \det(G \circ \varphi) \det(D\varphi)} \, d\tilde u \, d\tilde v$$

$$= \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det(D\varphi^T \cdot G \circ \varphi \cdot D\varphi)} \, d\tilde u \, d\tilde v = \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det \tilde G} \, d\tilde u \, d\tilde v$$

$$= \int_{\tilde\Omega} |\tilde X_{\tilde u} \times \tilde X_{\tilde v}| \, d\tilde u \, d\tilde v. \quad \square$$

Aufgabe 3

Es gilt: $X_u^\varepsilon = X_u + \varepsilon(\varphi_u N + N_u \varphi)$

$$X_v^\varepsilon = X_v + \varepsilon(\varphi_v N + N_v \varphi)$$

$$\Rightarrow X_u^\varepsilon \times X_v^\varepsilon = X_u \times X_v + \varepsilon\big(\varphi_v X_u \times N + \varphi X_u \times N_v + \varphi_u X_v \times N + \varphi X_v \times N_u\big) + \varepsilon^2\big((\varphi_u N + N_u \varphi) \times (\varphi_v N + N_v \varphi)\big)$$

$$=: X_u \times X_v + \varepsilon Y + \varepsilon^2 Z$$

$$\Rightarrow |X_u^\varepsilon \times X_v^\varepsilon| \geq |X_u \times X_v| - \varepsilon |Y| - \varepsilon^2 |Z|.$$

Da X regulär parametrisiert ist, gilt $|X_u \times X_v| > 0$ auf Ω.

Ferner ist mit $X \in C^2(\Omega)$ auch $X_u, X_v \in C^1(\Omega)$ und damit $N_u, N_v \in C^0(\Omega)$. Wegen $\operatorname{spt} \varphi \subset\subset \Omega$ folgt daher, dass

$\varphi_v X_u \times N$, $\varphi X_u \times N_v$, ... beschränkt sind, also

$\|Y\|_\infty, \|Z\|_\infty < \infty$. Für $|\varepsilon| < \varepsilon_0 := \frac{1}{3} \min\left\{ \frac{|X_u \times X_v|}{|Y|}, \sqrt{\frac{|X_u \times X_v|}{|Z|}} \right\}$

folgt daher $|X_u^\varepsilon \times X_v^\varepsilon| > 0$, sodass X^ε regulär parametrisiert ist. $\square$

Aufgabe 4

Siehe Skript, S. 82/83. $\square$