**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Differentialgeometrie (SS 2016)**
**Blatt 11**

---

### Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das elliptische Paraboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = x^2 + y^2\}.$$

keine Asymptotenlinien besitzt.

b) Bestimmen Sie die Asymptotenlinien des hyperbolischen Paraboloids

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = x^2 - y^2\}.$$

### Aufgabe 2 (4+5+1 Punkte)

Betrachten Sie die durch $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (av \cos u, av \sin u, bu),$$

mit $a, b > 0$ erklärte *Wendelfläche* (*Helikoid*).

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?

b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche für $a = b = 1$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie die Substitution $v(t) = \sinh(w(t))$).

c) Zeigen Sie, dass $X$ eine Minimalfläche ist.

### Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$X : [0, 2\pi) \times [0, \pi], \; (u, v) \mapsto \big(\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)\big)$$

Berechnen Sie die geodätische Krümmung aller Breiten- und Längenkreise ($u$- bzw. $v$-Koordinatenlinien).

# Diffgeo Blatt 11 – Lösung –

## Aufgabe 1

a) In der Vorlesung wurde gezeigt: $K>0 \Rightarrow$ keine Asymptotenlinien

Das Ell. Par. ist eine Graphenfläche, Für die Gaußkrümmung gilt daher die Formel

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)} \qquad \text{mit } f(x,y) = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{4-0^2}{(1+4x^2+4y^2)} > 0 \Rightarrow \text{keine Asymptotenlinie.}$$

b) Auch das hyp. Par. ist eine Graphenfläche, die zweite Fundamentalform also gegeben durch

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}, \quad \text{wo } f(x,y) = x^2-y^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = \frac{-2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Gemäß der Vorlesung genügen Asymptotenlinien der DGl

$$\mathcal{L}(\omega_1')^2 + 2\mathcal{M}(\omega_1'\omega_2') + \mathcal{N}(\omega_2')^2,$$

$\omega : I \to \Omega$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ Kurve im Parameterbereich.

Also:
$$\frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(\omega_1')^2 - \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(\omega_2')^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_1' = \pm\omega_2' + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Die Asymptotenlinien sind also: $z = (y\pm c)^2 - y^2$, $y\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$. $\square$

## Aufgabe 2

a) $X(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bu \end{pmatrix} + \underbrace{v \begin{pmatrix} a\cos u \\ a \sin u \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Regelgerade}}$

$$X_u = \begin{pmatrix} -av\sin u \\ av\cos u \\ b \end{pmatrix} \qquad X_v = \begin{pmatrix} a\cos u \\ a\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_u \times X_v = \left(-ab\sin u,\ ab\cos u,\ -a^2 v\right) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

$$X_{uv} = X_{vu} = \begin{pmatrix} -a\sin u \\ a\cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{uu} = \begin{pmatrix} -av\cos u \\ -av\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{vv} = 0$$

Differentialgleichung für Asymptotenlinien:

$$\mathcal{L}(u')^2 + 2\mathcal{M}u'v' + \mathcal{N}(v')^2 = 0 \qquad (1)$$

Es gilt: $N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2 v^2}} \left(-b\sin u,\ b\cos u,\ av\right)$

Es folgt:

$$\mathcal{L} = \langle X_{uu}, N \rangle = 0, \quad \mathcal{N} = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$$

$$\mathcal{M} = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2v^2}} \left(ab\sin^2 u + ab\cos^2 u\right)$$

$$= \frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2v^2}}$$

Einsetzen in (1) ergibt:

$$\frac{2ab}{\sqrt{b^2+a^2v^2}} u'v' = 0 \Leftrightarrow u'v' = 0 \qquad (2)$$

Für die Regelgeraden gilt $u \equiv \text{const}$ und damit $u' \equiv 0$, also erfüllen die Regelgeraden (2) und sind somit Asymptotenlinien.

b) $\mathcal{E} = \langle X_u, X_u \rangle = v^2+1$

$\mathcal{F} = \langle X_u, X_v \rangle = 0$

$\mathcal{G} = \langle X_v, X_v \rangle = 1$

Differentialgleichung für Krümmungslinien:

$$(\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L}) u'^2 + (\mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{L}) u'v' + (\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M}) v'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{v^2+1}{\sqrt{v^2+1}} u'^2 - \frac{1}{\sqrt{v^2+1}} v'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u'^2 = \frac{1}{1+v^2} v'^2$$

Substituiere $v(t) = \sinh(w(t))$ (Möglich, da $\sinh(\cdot)$ $C^\infty$-Diffeomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\overset{\cosh^2 - \sinh^2 = 1}{\Leftrightarrow} \quad u'^2 = \frac{1}{\cosh^2 w} \cosh^2 w \; w'^2$$

$$\Leftrightarrow \quad u'^2 = w'^2 \Leftrightarrow u' = \pm w'$$

$$\Leftrightarrow \quad u = c \pm w, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\Leftrightarrow \quad u = c \pm \operatorname{arsinh}(v)$$

Wähle z.B. $v(t) = t \Rightarrow u(t) = c \pm \operatorname{arsinh}(t)$

(Andere Wahlen von $v$ entsprechen lediglich Umparametrisierungen der Krümmungslinien!).

c) Nach der Vorlesung gilt:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{F}\mathcal{M}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \frac{0}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = 0$$

Per Definition ist $X$ somit eine Minimalfläche. $\square$

## Aufgabe 3

Breitenkreise:

$v \in [0, \pi]$ fest, $\quad u \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))$

Nach BL umparametrisieren:

$$\alpha : [0, 2\pi\sin(v)) \to \mathbb{R}^3, \; s \mapsto \left(\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\sin(v), \sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\sin v, \cos(v)\right)$$

$$\Rightarrow \quad t = \alpha'(s) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t' = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{1}{\sin(v)} \\ -\sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{1}{\sin(v)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{S} = \overline{N}(s) \times t(s) = -\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\sin(v) \\ \sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{1}{\sin(v)} \\ -\sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{1}{\sin(v)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{\cos(v)}{\sin(v)} \\ \cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{\cos(v)}{\sin(v)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \kappa_g = t' \cdot \overline{S} = 2\sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{\cos(v)}{\sin^2(v)}$$

(Nur der „Äquator" $(v = \frac{\pi}{2})$ ist eine Geodäte)

Längenkreise:

$u \in [0,2\pi)$ fest, $v \mapsto \left(\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)\right)$

Längenkreise sind schon nach BL parametrisiert:

$$t(s) = \beta'(v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(v)\cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}, \quad |\beta'| \equiv 1 .$$

$$\Rightarrow t'(v) = \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}$$

$$\bar{s} = \bar{N} \times t = -\begin{pmatrix} \cos(v)\sin v \\ \sin(u)\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(u) \\ -\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \kappa_g = t' \cdot \bar{s} = 0$ (Längenkreise sind immer Geodäten)

b) ~~Nach der VL gilt für die Gauß'sche Krümmung einer Rotationsfläche die Formel~~

$$\cancel{K = \frac{1}{(f')^2+(g')^2}\left[-\frac{g'(f''g' - f'g'')}{f}\right]}$$

~~wobei hier~~ $\cancel{f(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \; g(x) = x - \tanh(x)}$

$$\cancel{\Rightarrow (f')^2+(g')^2 = \frac{\tanh^2}{\cosh^2} + \tanh^4 = \tanh^2\left(\tanh^2 + \frac{1}{\cosh^2}\right)}$$

$$\cancel{= \tanh^2\left(\frac{\sinh^2+1}{\cosh^2}\right) = \tanh^2}$$

Aufgabe 3 b)

$$P_x^2 = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(y)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ -\frac{\sin(y)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \end{pmatrix}, \quad P_y^2 \begin{pmatrix} \frac{-\sin(y)}{\cosh(x)} \\ \frac{\cos(y)}{\cosh(x)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|P_x^2 \times P_y^2|^2 = \frac{\sinh^4(x)}{\cosh^6(x)} + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^6(x)} = \frac{\sinh^2 \overbrace{(\sinh^2+1)}^{=\cosh^2(x)}}{\cosh^6(x)} = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^4(x)}$$

$$N = \frac{P_x^2 \times P_y^2}{|P_x^2 \times P_y^2|} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(y)\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ -\frac{\sin(y)\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \frac{-1}{\cosh(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(y)\tanh(x) \\ -\sin(y)\tanh(x) \\ \frac{-1}{\cosh(x)} \end{pmatrix}$$

$$N_x = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(y)}{\cosh^2(x)} \\ \frac{-\sin(y)}{\cosh^2(x)} \\ \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sinh(x)} \cdot P_x^2$$

$$N_y = \begin{pmatrix} \sin(y)\tanh(x) \\ -\cos(y)\tanh(x) \\ 0 \end{pmatrix} = -\sinh(x) \cdot P_y^2$$

Also $DN = DP^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sinh(x)} & 0 \\ 0 & -\sinh(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Weingarten-Matrix $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sinh(x)} & 0 \\ 0 & -\sinh(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow K = \det B = -1.$ $\square$

Aufgabe 4

Sei $H \equiv K \equiv 0$. Dann gilt für die Hauptkrümmungen: $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ und damit insbesondere $S_w = 0 \ \forall w \in \Omega$. Wegen $S_w = -DN_w \circ DX_w^{-1}$ und $DX_w^{-1} : T_w X \to \mathbb{R}^2$ Isom. folgt $DN_w \equiv 0$, also $N \equiv$ const. und damit $X(\Omega) \subset$ Ebene senkrecht zu $N$.

Alternativ: Zitiere Satz 10 aus der VL: $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ alle Punkte von $X$ sind Flachpunkte $\Rightarrow X(\Omega) \subset$ Ebene.

Umgekehrte Richtung: $X(\Omega) \subset$ Ebene $\Rightarrow DN \equiv 0 \Rightarrow \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$

$\Rightarrow K \equiv H \equiv 0$. $\square$