Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Lösungsvorschlag zu Blatt 12

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$\alpha'(t) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

α ist somit regulär. Weiter folgt aus

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)|^2 &= (1 - t^2)^2 + (2t)^2 + (1 + t^2)^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4 \\ &= 2 + 4t^2 + 2t^4 = 2(1 + t^2)^2 \geq 2, \end{aligned}$$

dass α nicht nach BL parametrisiert ist.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\alpha''(t) = (-2t, 2, 2t) = 2(-t, 1, t), \quad \alpha'''(t) = (-2, 0, 2) = 2(-1, 0, 1), \\ &\alpha' \times \alpha'' = 2(2t^2 - 1 - t^2, -t - t^3 - t + t^3, 1 - t^2 + 2t^2) = 2(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1) \\ &|\alpha' \times \alpha''| = 2\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2 + (t^2 + 1)^2} = 2\sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2 + t^4 + 2t^2 + 1} \\ &\; = 2\sqrt{2t^4 + 4t^2 + 2} = 2\sqrt{2}(t^2 + 1) \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{2\sqrt{2}(1 + t^2)}{2\sqrt{2}(1 + t^2)^3} = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \\ \tau(t) &= \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \frac{4(-t^2 + 1 + t^2 + 1)}{4 \cdot 2(1 + t^2)^2} = \frac{1}{(1 + t^2)^2} = \kappa(t). \end{aligned}$$

c) Mit $e_3 = (0, 0, 1)^T$ haben wir

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha'(t) \cdot e_3}{|\alpha'(t)||e_3|} = \frac{1 + t^2}{\sqrt{2}(1 + t^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

d.h. $\theta = \pi/4$.

Aufgabe 2

(i) Wir berechnen $X_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir direkt:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Des Weiteren gilt: $X_u(u,v) \times X_v(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und wegen $|X_u(u,v) \times X_v(u,v)| = 1$ ergibt sich $N(u,v) = X_u(u,v) \times X_v(u,v)$. Darüber hinaus erhalten wir $X_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos(u) \\ -\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_{uv} = X_{vu} = X_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Fundamentalmatrix der zweiten Fundamentalform folgt demnach:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Hauptkrümmungen auszurechnen nutzen wir aus, dass $X_u(u,v)$ und $X_v(u,v)$ eine Orthonormalbasis von $T_{(u,v)}X$ bilden. Es ergibt sich demnach:

$$S_{(u,v)}(X_u(u,v)) = -N_u(u,v) = \begin{pmatrix} \sin(u) \\ -\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)X_u(u,v),$$

wobei hierbei $\kappa_1 = -1$ und $X_u(u,v)$ in jedem Punkt $\omega = (u,v) \in \Omega$ Hauptkrümmung bzw. Hauptkrümmungsrichtung sind. Analog erhalten wir $S_{(u,v)}(X_v(u,v)) = -N_v(u,v) = 0$, also $\kappa_2 = 0$ als zweite Hauptkrümmung und $X_v(u,v)$ als zweite Hauptkrümmungsrichtung in jedem Punkt $\omega \in \Omega$.

(ii) Wir berechnen $X_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\exp(-u)(\cos(u) + \sin(u)) \\ \exp(-u)(\cos(u) - \sin(u)) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit erhalten wir direkt:

$$G = \begin{pmatrix} 2\exp(-2u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren gilt:

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) = \begin{pmatrix} \exp(-u)(\cos(u) - \sin(u)) \\ \exp(-u)(\cos(u) + \sin(u)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$|X_u(u,v) \times X_v(u,v)| = \exp(-u)\sqrt{2}.$$

Darüber hinaus berechnen wir:

$$X_{uv} = X_{vu} = X_{vv} = 0 \,\text{und}\, X_{uu} = \begin{pmatrix} 2\exp(-u)\sin(u) \\ -2\exp(-u)\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix der zweiten Fundamentalform hat demnach die Darstellung:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\exp(u)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die beiden Hauptkrümmungen erhalten wir nach Berechnen der Darstellungsmatrix der Weingartenabbildung:

$$\kappa_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}\exp(-u)} \,\text{und}\, \kappa_2 = 0.$$

Aufgabe 3

Nach Voraussetzung gilt $|\gamma(s) - \xi|^2 = R^2$. Differenzieren dieser Gleichung ergibt

$$0 = \frac{d}{ds}\big(|\gamma(s) - \xi|^2\big) = 2\big(\gamma(s) - \xi\big) \cdot \gamma'(s)$$

für alle $s \in I$. Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, bedeutet dies $(\gamma - \xi) \cdot \mathbf{t} \equiv 0$. Da die Krümmung von γ durch γ'' bestimmt ist, leiten wir die Gleichung nochmals ab:

$$0 = \frac{d^2}{ds^2}\big(|\gamma(s) - \xi|^2\big) = 2\Big(|\gamma'(s)|^2 + \big(\gamma(s) - \xi\big) \cdot \gamma''(s)\Big)$$

für alle $s \in I$. Wegen $|\gamma'| \equiv 1$ ist dies wiederum gleichbedeutend mit

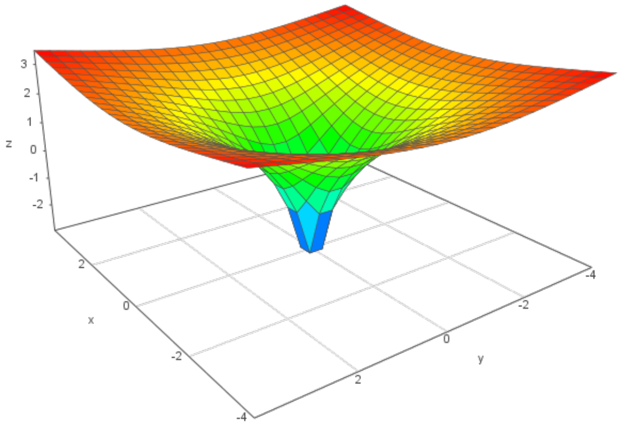
$$(\gamma - \xi) \cdot \mathbf{t}' \equiv -1,$$

wegen der Frenet–Gleichung $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ also $(\gamma - \xi) \cdot \kappa\mathbf{n} \equiv -1$. Dies impliziert aber $\kappa \neq 0$ (sonst: $0 = -1$), und damit die behauptete Formel.

Aufgabe 4

a) Es ist

$$X_u = \left(1, 0, \frac{2u}{u^2 + v^2}\right), \quad X_v = \left(0, 1, \frac{2v}{u^2 + v^2}\right),$$



d.h.

$$X_u \times X_v = \left(-\frac{2u}{u^2+v^2}, -\frac{2v}{u^2+v^2}, 1 \right) \neq 0,$$

sodass X regulär ist.

b) Nach Teil a) gilt (mit $r^2 = u^2 + v^2$):

$$N(u,v) = \frac{1}{r\sqrt{r^2+4}} \big(-2u, -2v, r^2 \big).$$

Weiterhin gilt

$$X_{uu} = \left(0, 0, \frac{2(v^2-u^2)}{r^4} \right), \quad X_{uv} = \left(0, 0, -\frac{4uv}{r^4} \right), \quad X_{vv} = \left(0, 0, \frac{2(u^2-v^2)}{r^4} \right).$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform berechnen sich damit zu

$$\mathcal{E} = X_u \cdot X_u = \frac{r^4+4u^2}{r^4}, \quad \mathcal{F} = X_u \cdot X_v = \frac{4uv}{r^4}, \quad \mathcal{G} = X_v \cdot X_v = \frac{r^4+4v^2}{r^4},$$

die der zweiten Fundamentalform lauten

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = \frac{2(v^2-u^2)}{r^3\sqrt{r^2+4}}, \quad \mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = \frac{4uv}{r^3\sqrt{r^2+4}},$$
$$\mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = \frac{2(u^2-v^2)}{r^3\sqrt{r^2+4}}.$$

Damit sind

$$\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \frac{r^2+4}{r^2}$$

und

$$\mathcal{LN} - \mathcal{M}^2 = -\frac{4}{r^4 + 4r^2}.$$

Die Gaußsche Krümmung berechnet sich damit zu

$$K = \frac{\mathcal{LN} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{EG} - \mathcal{F}^2} = -\frac{4}{(r^2+4)^2}.$$

c) (i) Es ist

$$\alpha'(s) = \left(g'(s), 0, 2\frac{g'(s)}{g(s)}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4/g^2}}\left(1, 0, \frac{2}{g}\right), \quad |\alpha'(s)| \equiv 1,$$

und

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= \left(-\frac{1}{2}\right)(1+4/g^2)^{-3/2} 4(-2g^{-3}g')\left(1,0,\frac{2}{g}\right) \\
&\quad + (1+4/g^2)^{-1/2}\left(0,0,-2g^{-2}g'\right) \\
&= \frac{2g'}{g^4(1+4/g^2)^{3/2}}\left[(2g,0,4) + \left(0,0,-g^2-4\right)\right] \\
&= \frac{2}{(4+g^2)^2}\left(2g,0,-g^2\right).
\end{aligned}$$

Für die Krümmung und den Normalenvektor ergibt sich

$$\kappa = |\alpha''| = \frac{2g}{(4+g^2)^{3/2}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{4+g^2}}(2,0,-g).$$

(ii) Mit $\big(u(s), v(s)\big) = \big(g(s), 0\big)$ ist

$$N(u(s), v(s)) = \frac{1}{g\sqrt{4+g^2}}\left(-2g, 0, g^2\right) \sim \alpha''(s),$$

also $\kappa_n = \kappa$ und somit $\kappa_g = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n} = 0$, d.h. die Kurve ist eine Geodätische.

(iii) Es ist $\gamma(0) = \alpha(0)$ und $\gamma'(0) = \alpha'(0)$. Nach dem Satz von Meusnier haben γ und α in $s = 0$ dieselbe Normalkrümmung $\kappa_n = \kappa$.