Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 1

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Die ebene Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$, schneidet die Einheitskreislinie $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ in genau einem von $(0,1)$ verschiedenen Punkt, der durch $(x(t), y(t))$ bezeichnet sei.

a) Bestimmen Sie die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und zeigen Sie, dass durch $\alpha(t) := (x(t), y(t))$ eine reguläre Parametrisierung von $K - \{(0,1)\}$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\alpha(t)$ für $t \in [-1,1]$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Begründen Sie, dass die folgenden Kurven im $\mathbb{R}^3$ endliche Länge haben und berechnen Sie diese:

a) $\beta(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t \in [0,1]$.

b) $\gamma(t) = (t, t\sin(t), t\cos(t)), \quad t \in [0, \sqrt{2}]$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven nach der Bogenlänge:

a) $\delta(t) := e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1), \quad t \in (1, \infty)$.

b) $\varepsilon(t) := (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t), \quad t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

Seien $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine regulär parametrisierte Kurve, $[a,b] \subset I$ und $A = \alpha(a)$, $B = \beta(b)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

a) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A) \cdot e \leq L,$$

wobei L die Länge des Bogens von A nach B sei.

b) Die kürzeste Länge von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.

Abgabe: Bis Montag, den 2. Mai 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.