Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 10

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet) eine parametrisierte Fläche und $w \in \Omega$ fixiert. Zeigen Sie: Durch die Abbildung $III_w : T_wX \times T_wX \to \mathbb{R}$,

$$III_w(U,V) := S_w(U) \cdot S_w(V)$$

wird eine symmetrische Bilinearform erklärt (*dritte Fundamenatlform* von X) und es besteht die Beziehung

$$III_w - (\kappa_1(w) + \kappa_2(w))II_w + \kappa_1(w)\kappa_2(w)I_w \equiv 0.$$

Darin bezeichnen $\kappa_{1,2}(w)$ die Hauptkrümmungen von X bei w.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie die *Parameterinvarianz des Flächeninhalts*: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Fläche, $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus und $\widetilde{X} := X \circ \varphi$. Dann ist

$$\int\limits_{\Omega} |X_u \times X_v| \, du \, dv = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{X}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{X}_{\widetilde{v}}| \, d\widetilde{u} \, d\widetilde{v}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbar parametrisiertes Flächenstück. Man setzt für $(u,v) \in \Omega$

$$X^\varepsilon(u,v) := X(u,v) + \varepsilon\varphi(u,v)N(u,v),$$

wobei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $N(u,v)$ der Normalenvektor von X ist. Zeigen Sie: Für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$ ist X^ε für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ eine regulär parametrisierte Fläche. Man bezeichnet diese als eine *Normalvariation* von X.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

Als *Minimalfläche* bezeichnet man eine parametrisierte Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet) mit verschwindender mittlerer Krümmung $H \equiv 0$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass sich eine Minimalfläche auch dadurch charakterisieren lässt, dass für sie unter allen ihren Normalvariationen (vgl. Aufgabe 3) der Flächeninhalt extremal wird (Minimum *oder* Maximum!).

a) Es sei X^ε eine Normalvariation von X gemäß Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten $\mathcal{E}_\varepsilon$, $\mathcal{F}_\varepsilon$ und $\mathcal{G}_\varepsilon$ der ersten Fundamentalform von X^ε der folgende Zusammenhang besteht:

$$\mathcal{E}_\varepsilon \mathcal{G}_\varepsilon - (\mathcal{F}_\varepsilon)^2 = (\mathcal{E}_0 \mathcal{G}_0 - \mathcal{F}_0^2)(1 - 4\varepsilon\varphi H) + R,$$

wobei $R = R(u, v, \varepsilon)$ mit $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} R(u, v, \varepsilon)/\varepsilon = 0$ ist.

b) Folgern Sie, dass für den Flächeninhalt $\mathcal{A}(\varepsilon) := A(X_\varepsilon)$ gilt:

$$\mathcal{A}'(0) = 0 \Leftrightarrow H \equiv 0,$$

d.h. $\varepsilon = 0$ ist ein stationärer Punkt des Flächenfunktionals und der Flächeninhalt hat für X ein lokales Extremum, genau dann, wenn die mittlere Krümmung verschwindet.

Abgabe: Bis **Montag, den 04. Juli** 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.