Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 11

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das elliptische Paraboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 + y^2\}.$$

keine Asymptotenlinien besitzt.

b) Bestimmen Sie die Asymptotenlinien des hyperbolischen Paraboloids

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 - y^2\}.$$

Aufgabe 2 (4+5+1 Punkte)

Betrachten Sie die durch $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (av \cos u, av \sin u, bu),$$

mit $a, b > 0$ erklärte *Wendelfläche* (*Helikoid*).

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?

b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche für $a = b = 1$.
$\big($*Hinweis:* Benutzen Sie die Substitution $v(t) = \sinh(w(t))\big)$.

c) Zeigen Sie, dass X eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$X : [0, 2\pi) \times [0, \pi],\ (u, v) \mapsto \big(\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)\big)$$

Berechnen Sie die geodätische Krümmung aller Breiten- und Längenkreise (u- bzw. v-Koordinatenlinien).

b) Die sog. *Pseudosphäre* ist die durch

$$P^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ P^2(x,y) := \left(\frac{\cos(y)}{\cosh(x)}, \frac{\sin(y)}{\cosh(x)}, x - \tanh(x)\right)$$

regulär parametrisierte Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass die Pseudosphäre konstante negative Gaußkrümmung besitzt und folgern Sie, dass die Pseudosphäre nicht kompakt ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung einer Fläche. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $H \equiv K \equiv 0$ auf Ω.

(ii) $X(\Omega)$ ist Teilmenge einer Ebene.

Abgabe: Bis **Montag, den 11. Juli** 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.