Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 12

Keine Abgabe! Dieses Aufgabenblatt dient Ihrer eigenen Vorbereitung auf die Klausur und wird nicht korrigiert. Einen Lösungsvorschlag finden Sie ab Freitag, dem 22. Juli auf der Homepage zur Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die durch

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) := \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3}\right)$$

parametrisierte Kurve.

a) Ist α regulär und nach Bogenlänge parametrisiert?

b) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von α.

c) Zeigen Sie, dass alle Tangentenvektoren mit $(0,0,1)^T$ einen konstanten Winkel einschließen und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fundamentalmatrizen der ersten und zweiten Fundamentalform sowie die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 in jedem Punkt $w \in \Omega$ folgender Flächen, die durch die Abbildungen $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ beschrieben werden ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen).

(i) Für $\Omega := [0, \pi) \times [0, h]$ sei

$$X(u, v) := \big(\cos(u), \sin(u), v\big).$$

(ii) Für $\Omega : (0, \infty) \times \mathbb{R}$ sei

$$X(u, v) := \big(\exp(-u)\cos(u), \exp(-u)\sin(u), v\big)$$

Aufgabe 3

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Spur in einer Sphäre mit Radius $R > 0$ um den Punkt $\xi \in \mathbb{R}^3$ liegt. Zeigen Sie, dass für die Krümmung κ von γ gilt:

$$\kappa(s) \neq 0 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\kappa(s)} = \big(\gamma(s) - \xi\big) \cdot n(s) \quad \text{für alle } s \in I,$$

wobei $n(s)$ den Normalenvektor von γ bei s bezeichnet.
(*Hinweis:* Differenzieren Sie $|\gamma(s) - \xi|^2$ zweimal.)

Aufgabe 4

Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Fläche

$$X : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ X(u,v) = \big(u, v, \log(u^2 + v^2)\big).$$

a) Zeigen Sie, dass es sich (lokal) um eine regulär parametrisierte Fläche handelt und skizzieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung der Fläche.

c) Es sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $g : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $g(0) = 1$ sowie

$$g'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{g(s)^2}}} \qquad \text{für alle } s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\alpha(s) := \big(g(s), 0, 2\log(g(s))\big)$.

(i) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und die Normale $n(s)$ an die Kurve.

(ii) Ist α eine Geodätische auf X? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Bestimmen Sie für die Kurve $\gamma(s) := \big(g(s), s^2, \log(g(s)^2 + s^4)\big)$ auf der Fläche die Normalkrümmung für $s = 0$.