Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 2

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Es seien $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\alpha \times \beta : I \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar mit

$$(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta' \text{ auf } I.$$

b) Gelten mit den Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$\alpha' = a\alpha + b\beta \text{ und } \beta' = c\alpha - a\beta \text{ auf } I,$$

so ist $\alpha \times \beta$ konstant auf I.

c) Beweisen Sie für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u.$$

Aufgabe 2 (2+4+2+2 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$. Betrachten Sie die durch

$$\gamma(s) := \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right) \quad (s \in \mathbb{R})$$

erklärte parametrisierte Kurve.

a) Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert?

b) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von γ.

c) Zeigen Sie, dass alle Geraden in Richtung des Normalenvektors von $\gamma(s)$, die durch $\gamma(s)$ gehen, die z-Achse unter einem konstanten Winkel schneiden.

d) Skizzieren Sie die Kurve γ.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Frenetsche Dreibein (t, n, b) einer beliebigen (nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisierten) regulären Kurve $\alpha = \alpha(u) : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit nirgends verschwindender Krümmung gegeben ist durch

$$t = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad n = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''||\alpha'|} \times \alpha', \quad b = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}.$$

(*Hinweis:* Parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge und benutzen Sie A. 1.)

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer regulären ebenen Kurve bei Umorientierung das Vorzeichen wechselt.

b) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer beliebigen regulären ebenen Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit $\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ gegeben ist durch

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Abgabe: Bis Montag, den 9. Mai 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.