



Aufgabe 1 (3+1+3+3 Punkte)

- a) Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine (nicht notwendig nach der Bogenlänge) regulär parametrisierte ebene Kurve. Zeigen Sie: Für den Rotationsindex I_γ von γ gilt:

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- b) Skizzieren Sie die Spur der folgenden ebenen Kurven und berechnen Sie ihren Rotationsindex:

(i) $(x(t), y(t)) := (\cos(nt), \sin(nt)), t \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N};$

(ii) $(x(t), y(t)) := (a \cos(t), b \sin(t)), t \in [0, 4\pi], a, b > 0;$

(iii) $(x(t), y(t)) := (\cos(t) - \cos(2t), \sin(t) - \sin(2t)), t \in [0, 2\pi];$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine regulär parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung κ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- a) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass $t \cdot v$ konstant ist.
- b) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $n \cdot v \equiv 0$.
- c) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ derart, dass $b \cdot v$ konstant ist.
- d) Das Verhältnis von Torsion τ und Krümmung κ ist konstant.

Eine Kurve, welche einer dieser äquivalenten Bedingungen genügt, heißt *Böschungslinie*.

Aufgabe 3 (2+3+5 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$c(t) := \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & ; t < 0, \\ (0, 0, 0) & ; t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & ; t > 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass c eine reguläre differenzierbare ($c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$) Kurve ist.
- Beweisen Sie, dass die Krümmung κ von c nur für die Parameter $t \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ verschwindet. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage $\kappa(0) = 0$?
- Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegebenen von c bei $t \downarrow 0$ die Ebene mit der Gleichung $y = 0$ ist, während bei $t \uparrow 0$ die Ebene mit der Gleichung $z = 0$ approximiert wird. Was bedeutet dies für die Torsion?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei $\alpha(s)$, $s \in [0, l]$, eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Kurve. Für ihre Krümmung $\kappa(s)$ gelte $0 < \kappa(s) \leq c$ mit einer Konstanten c . Zeigen Sie: Für die Länge l der Kurve gilt

$$l \geq \frac{2\pi}{c}.$$

Was bedeutet dies anschaulich?