Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 5

Aufgabe 1 (2+4+4 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und sei $\alpha_r : I \to \mathbb{R}^2$ für $r > 0$ erklärt durch

$$\alpha_r(t) := \alpha(t) \pm r n_\alpha(t),$$

wobei $n_\alpha(t)$ die Normale von α bei t bezeichnet. α_r heißt *innere* (+) bzw. *äußere* (−) *Parallelkurve* zu α im Abstand r.

a) Wann ist α_r regulär? Wann ist α_r nach der Bogenlänge parametrisiert?

b) Drücken Sie im Fall, dass α_r regulär ist, die orientierte Krümmung κ_r von α_r durch die orientierte Krümmung κ von α aus.

c) Sei $I = \mathbb{R}$ und sei α periodisch mit Periode $\ell \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dr} L(\alpha_r|_{[0,\ell]})\Big|_{r=0} = \mp 2\pi I(\alpha|_{[0,\ell]}),$$

wobei $I(\alpha|_{[0,\ell]})$ den Rotationsindex von $\alpha|_{[0,\ell]}$ und L die Bogenlänge bezeichnet.

Aufgabe 2 (3+2+5 Punkte)

Eine einfach geschlossene, reguläre und konvexe Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit nirgends verschwindender Krümmung heißt *Eilinie*.

a) Beweisen Sie, dass eine Eilinie α zu jedem Einheitsvektor e genau einen Parameter $s \in I$ mit $t_\alpha(s) = e$ besitzt.

b) Begründen Sie, dass α nach dem orientierten Winkel $\vartheta(s) \in [0, 2\pi]$ zwischen dem Tangentenvektor $t_\alpha(s)$ und der x-Achse umparametrisiert werden kann. Diese Koordinaten heißen *tangentiale Polarkoordinaten*.

c) Es bezeichne β die gemäß b) in tangentialen Polarkoordinaten parametrisierte Eilinie α. Die Kurve β heißt ein *Gleichdick*, falls für die *Stützfunktion* $h(\vartheta) := -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$ mit einer Konstanten $d > 0$ gilt:

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d \text{ für alle } \vartheta \in [0, \pi].$$

Zeigen Sie, dass ein Gleichdick der Breite d den Umfang πd hat.

(*Hinweis zu c)*: Stellen Sie β bzgl. des Zweibeins (n_β, n'_β) und mittels der Stützfunktion h dar.)

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ $(L > 0)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene und konvexe Kurve mit positiver Orientierung und α_r die äußere Parallelkurve im Abstand $r > 0$ (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie:

a) $U(\alpha_r) = U(\alpha) + 2\pi r$.

b) $A(\alpha_r) = A(\alpha) + Lr + \pi r^2$.

Dabei bezeichnen $U(\alpha)$ den Umfang und $A(\alpha)$ den Inhalt des von der Kurve α umschlossenen Gebietes.
(*Hinweis:* Sie dürfen den folgenden Satz ohne Beweis benutzen: Es sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, $\alpha(t) := (x(t), y(t))$ ein stetig differenzierbarer Weg mit positiver Krümmung und ohne Doppelpunkte (d.h. α ist injektiv). Seien $A := \alpha(a)$ und $B := \alpha(b)$. Dann begrenzen die Spur von α und die Strecken $\overline{OA}$ sowie $\overline{BO}$ ein beschränktes Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$, dessen Inhalt durch die Formel

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\,dt$$

gegeben ist.)

Aufgabe 4 (2+2,5+5,5 Punkte)

Betrachten Sie die in Polarkoordinaten durch

$$r(t) := \frac{a\cos(2t)}{\cos(t)}$$

$(a > 0)$ gegebene ebene Kurve $\alpha : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$ (*Strophoide*).

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen und zeigen Sie, dass sie die Gerade $x = -a$ als Asymptote hat.

b) Die Kurve α hat im Ursprung einen *Doppelpunkt* (d.h. es gibt $t_1 \neq t_2$ mit $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$), sodass die Kurve eine Schleife bildet. Zeigen Sie, dass der Inhalt des von dieser Schleife umschlossenen Gebietes $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$ beträgt (Skizze!).

c) Die Kurve schließt zusammen mit ihrer Asymptote eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Zeigen Sie, dass deren Inhalt $\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2$ beträgt. (*Hinweis*: Betrachten Sie die um den Vektor $(a, 0)$ verschobene Kurve und benutzen Sie die Formel aus Aufgabe 2).

Abgabe: Bis **Montag, den 30. Mai** 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.