Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 7

Aufgabe 1 (5×2 Punkte)

Betrachten Sie für $a, b, c > 0$ die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1)\right\}$ $(Ellipsoid)$.

b) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1)\right\}$ $(einschaliges\, Hyperboloid)$.

c) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1)\right\}$ $(zweischaliges\, Hyperboloid)$.

d) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0)\right\}$ $(elliptisches\, Paraboloid)$.

e) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0)\right\}$ $(hyperbolisches\, Paraboloid)$.

Skizzieren Sie diese Mengen und stellen Sie möglichst große Teilmengen davon als parametrisierte Fläche dar.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

Es sei C die Spur einer regulären parametrisierten Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) mit $P \notin C$ für einen fixierten Punkt $P \in \mathbb{R}^3$. Sei K die Punktmenge, welche dadurch entsteht, dass sich eine durch den Punkt P verlaufende Gerade längs der Kurve C bewegt.

a) Finden Sie eine Parametrisierung X, deren Spur die Punktmenge K ist.

b) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung von X. Wann handelt es sich bei X um eine reguläre Fläche?

c) Untersuchen Sie die Situation, wenn C die Spur des Kreises $\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (0, \cos(t), \sin(t))$ ist und fertigen Sie eine Skizze an!

Aufgabe 3 ($4 \times 2,5$ Punkte)

Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(u,v) := \frac{1}{u^2+v^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

a) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

b) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung N von X.

c) Stellen Sie das durch $V(u,v) := (u,v,1)$ definierte Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ längs X in der Form

$$V = V^1 X_u + V^2 X_v + V^3 N$$

mit Funktionen $V^k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($k \in \{1,2,3\}$) dar.

d) Bestimmen Sie die Koeffizienten g_{ij} der ersten Fundamentalform von X.

Aufgabe 4 (2+4+4 Punkte)

Beschreiben Sie den Teil der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, der durch das Bild der Gauß-Abbildung folgender Flächen überdeckt wird und fertigen Sie jeweils eine Skizze an:

a) Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$.

b) Rotationshyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

c) Katenoid $x^2 + y^2 = \cosh^2 z$.

Abgabe: Bis **Montag, den 13. Juni** 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.