Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 8

Aufgabe 1 (1+2+1+6 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Koeffizienten $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ der ersten Fundamentalform:

a) Für die Zylinderfläche $X(u,v) : (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v) := \big(\cos(u), \sin(u), v\big)$,

b) für die Sphäre $X : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u,v) = \big(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(v)\big),$$

c) für die Kegelfläche $X : (0,2\pi) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u,v) = v\big(\cos(u), \sin(u), 1\big).$$

d) Es sei X die Rotationsfläche einer regulären ebenen Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ um die x-Achse. Zeigen Sie, dass es stets eine Parametrisierung $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto X(u,v)$ gibt, sodass

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(v),\ \mathcal{F} \equiv 0 \text{ und } \mathcal{G} \equiv 1.$$

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $X : (0, \pi/2) \times (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u,v) := \big((a + b\sin(v))\sin(u), (a - b\cos(v))\sin(u), c\sin(u)\big)$$

wobei a, b und c reelle Zahlen sind.

a) Untersuchen Sie, wann durch X eine regulär parametrisierte Fläche erklärt wird.

b) Bestimmen Sie (im Falle der Regularität) die erste Fundamentalform von X.

Aufgabe 3 (4+3+3 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine regulär parametrisierte doppelpunktfreie (d.h. α ist injektiv) Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Für ein $r > 0$ sei $X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(u, v) := \alpha(u) + r\big(\cos vn(u) + \sin vb(u)\big),$$

wobei n und b die Normale bzw. Binormale der *Leitkurve* α bezeichnen. Eine solche Fläche wird *Röhrenfläche* genannt.

a) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von X. Unter welchen Voraussetzungen ist X eine regulär parametrisierte Fläche?

b) Bestimmen Sie die zu X gehörige Gauß-Abbildung unter der Voraussetzung, dass X regulär ist.

c) Bestimmen Sie X, wenn die Leitkurve der Kreis $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $t \in [0, 2\pi)$ und $r = \frac{1}{2}$ ist. Skizzieren Sie diese Fläche.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\phi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen der zweiten Fundamentalform II (bzw. II^{TX}) von X und der zweiten Fundamentalform $\widetilde{II}$ (bzw. $II^{T\widetilde{X}}$) der umparametrisierten Fläche $\widetilde{X} := X \circ \varphi$.

a) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$ und alle $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\widetilde{II}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\widetilde{U}, \widetilde{V}) = II_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}\big(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{V}\big)$$

b) Für alle $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$ und alle $U, V \in T_{(\widetilde{u},\widetilde{v})}\widetilde{X}$ ist

$$II^{T\widetilde{X}}_{(\widetilde{u},\widetilde{v})}(U, V) = II^{TX}_{\varphi(\widetilde{u},\widetilde{v})}(U, V).$$

Abgabe: Bis **Montag, den 20. Juni** 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.