Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Differentialgeometrie (SS 2016)
Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei X die durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

definierte Zylinderfläche in $\mathbb{R}^3$ und $p \in X$ ein beliebiger Punkt. Bestimmen Sie alle Normalschnitte sowie die minimale- und die maximale Normalkrümmung von X in p.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Schneidet die Fläche X_1 die Fläche X_2 längs einer regulären Kurve C, so ist die Krümmung κ von C in $p \in C$ gegeben durch

$$\kappa^2 \sin^2 \theta = \kappa_{n_1}^2 + \kappa_{n_2}^2 - 2\kappa_{n_1}\kappa_{n_2} \cos \theta,$$

wobei κ_{n_1} und κ_{n_2} die Normalkrümmungen bei p längs der Tangente an C von X_1 bzw. X_2 sind, und θ der Winkel zwischen den Normalenvektoren N_1 und N_2 von X_1 bzw. X_2 bei p ist.

Hinweis: Betrachten Sie das von den Vektoren $\kappa_{n_1} N_2$ und $\kappa_{n_2} N_1$ aufgespannte Dreieck!

Aufgabe 3 (6+2+2 Punkte)

Es sei X der durch

$$X : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ X(u, v) = \big((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u\big)$$

parametrisierte Torus in $\mathbb{R}^3$, wobei a und r positive reelle Zahlen mit $r < a$ sind.

a) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform von X.

b) Bestimmen Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt von X.

c) Skizzieren Sie die Normalschnitte von X durch den Punkt $(a, 0, r)$.

Aufgabe 4 (2+5+3 Punkte)

Eine Abbildung $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der Gestalt

$$X(u,v) := \alpha(u) + vw(u),$$

wobei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $w : I \to \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ glatt ist, heißt eine *Regelfläche*, falls X regulär ist. Die Kurve α wird dabei *Leitkurve* und die Geraden $v \mapsto \alpha(u) + vw(u)$ ($u \in I$ fest) werden die *Regelgeraden* genannt.

a) Unter welchen Bedingungen ist X eine reguläre parametrisierte Fläche?

b) Zeigen Sie, dass die Tangentialebene von X in einem Punkt $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$ (sofern diese existiert) genau dann unabhängig von v ist, wenn die Vektoren $\alpha'(u), w'(u)$ und $w(u)$ linear abhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid (siehe Aufgabe 1 auf Blatt 7) eine Regelfläche ist.

Abgabe: Bis **Montag, den 27. Juni** 12:00 Uhr in Briefkasten 005, Geb. E 2.5.