

Differentialgeometrie

SS 2008

M. Fuchs

Literatur

Manfredo P. Do Carmo Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall sowie die deutschsprachige Übersetzung (gekürzt!) Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg.

Bemerkung:

Die Vorlesung orientiert sich in wesentlichen Teilen an der Ausarbeitung von Prof. M. Grüter.

Warnung:

Das vorliegende Skript kann den Besuch der gleichnamigen Vorlesung nicht ersetzen! Es, das Skript, erhebt keinen Anspruch auf Fehlerfreiheit! Falls Sie beim Lesen Fehler entdecken sollten, teilen Sie uns diese gerne mit! Glaube ist gut, Kontrolle ist besser!

Inhalt

Kapitel 0. Einleitung	4
Kapitel 1. Kurventheorie	5
§ 1. Grundbegriffe und Beispiele	5
§ 2. Lokale Kurventheorie im \mathbb{R}^3	17
§ 3. Globale Eigenschaften ebener Kurven	31
Kapitel 2. Flächentheorie	45
§ 1. Beschreibung parametrisierter Flächen - Grundbegriffe	45
§ 2. Erste und Zweite Fundamentalform parametrisierter Flächen	51
§ 3. Krümmungsbegriffe für Flächen	65
§ 4. Spezielle Klassen von Flächen	79
Kapitel 3. Die innere Geometrie von Flächen	84
§ 1. Einführung	84
§ 2. Konforme Abbildungen	92
§ 3. Das Theorema Egregium von Gauß	95
§ 4. Paralleltransport und geodätische Linien auf Flächen	103

Kapitel 0

Einleitung

Die Vorlesung sollte eigentlich als “**Elementare Differentialgeometrie**” bezeichnet werden, denn sie widmet sich fast ausschließlich dem Studium von

Kurven und Flächen im Raum \mathbb{R}^3 .

Dabei unterscheidet man zwischen lokalen und globalen Aussagen: Beispielsweise werden wir in natürlicher Weise das Krümmungsverhalten von Flächen lokal in der Nähe eines Punktes definieren oder die sogenannte lokale kanonische Darstellung von Kurven in \mathbb{R}^3 kennenlernen. Ein globaler Satz ist dagegen die folgende Charakterisierung von Sphären im Raum:

| *Ist S eine kompakte, zusammenhängende, reguläre Fläche mit konstanter Gauß-Krümmung, so ist S eine Sphäre.*

Hier ermöglicht also die Information über das Verhalten der lokalen Größe “Gauß-Krümmung” eine präzise Beschreibung der globalen Gestalt der Fläche.

Etwas abstrakter formuliert handelt es sich bei den von uns untersuchten Kurven und Flächen um 1- bzw. 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 , insbesondere haben wir damit in jeder Tangentialebene an eine Fläche in natürlicher Weise ein Skalarprodukt, (nämlich Einschränkung des Euklidischen Skalarproduktes). Zu jeder Tangentialebene existiert ein bis auf das Vorzeichen eindeutiger Normalenvektor, und die lokale Änderungsrate des Normalenfeldes misst anschaulich die Krümmung der Fläche. M.a.W.: Im Rahmen unserer Betrachtungen werden alle geometrischen Größen von der Euklidischen Metrik des \mathbb{R}^3 induziert. Eine leichte Verallgemeinerung würde sich ergeben, wenn man \mathbb{R}^3 mit einem anderen Skalarprodukt versieht. Ein deutlich größerer Grad an Allgemeinheit liegt vor, wenn dieses Skalarprodukt (stetig) vom Punkt abhängen darf. In der Riemannschen Geometrie trennt man sich zunächst ganz von einem umgebenden Raum, d.h. man betrachtet n -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einer differenzierbaren Struktur, erklärt damit Tangentialräume in jedem Punkt und verlangt schließlich, dass man diese Tangentialräume in vernünftiger Weise zu Skalarprodukträumen machen kann. Dies wiederum ermöglicht die Entwicklung geometrischer Begriffe, allerdings ist hierzu ein sehr großer formaler Aufwand nötig, was den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde.

Kapitel 1

Kurventheorie

§ 1 Grundbegriffe und Beispiele

DEFINITION

Eine differenzierbare Kurve (genauer: eine parametrisierte differenzierbare Kurve) ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall, $n \geq 2$.

Bemerkungen

- 1.) Das Wort “differenzierbar” hat hier eine andere Bedeutung als in der Analysis, wo man damit nur die Existenz der ersten Ableitung meint. Für die meisten Betrachtungen kommen wir mit C^2 (= 2mal stetig differenzierbar) aus.
- 2.) $n = 2 \rightsquigarrow$ parametrisierte Kurve in der Ebene
 $n = 3 \rightsquigarrow$ parametrisierte Raumkurve
- 3.) Eine Kurve α ist nicht zu verwechseln mit der Punktmenge

$$\text{Spur } \alpha := \{\alpha(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Die Spur repräsentiert den Verlauf der Kurve “optisch”, man hat aber keinerlei Information, wo (= $\alpha(t)$) man sich zur Zeit $t \in I$ mit welcher Geschwindigkeit (= $\alpha'(t)$) bewegt. Die Parametrisierung ist ein “Fahrplan” für Spur α .

- 4.) Ist $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, so nennt man $\alpha'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ (oft auch $\dot{\alpha}(t)$) den Tangentenvektor (oder Geschwindigkeitsvektor) der Kurve α bei t .

Sei $t_0 \in I$ und $\alpha'(t_0) \neq 0$. Dann beschreibt

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t_0)$$

eine Gerade mit Richtung $\alpha'(t_0) \in \mathbb{R}^n$, die zur Zeit t_0 durch den Punkt $\alpha(t_0)$ geht. Man nennt diese Gerade die Tangente an die Kurve α in t_0 . Ist $t_0 \in I$ ein singulärer Punkt von α , d. h. per Definition $\alpha'(t_0) = 0$, so degeneriert obige Abbildung zur Konstanten Funktion $t \mapsto \alpha(t_0)$; die geometrische Vorstellung einer Tangente als Gerade geht verloren. Deshalb betrachtet man in der Differentialgeometrie meist nur folgende Klasse von Kurven:

DEFINITION

Eine Kurve (natürlich differenzierbar!) $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls gilt:

$$\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Es gibt also keine singulären Punkte.

Bemerkung

Für reguläre Kurven misst man, wie schnell die Tangente lokal bei t_0 ihre Lage variiert und nimmt dies als Maß dafür, wie stark die Kurve bei t_0 gekrümmt ist.

Beispiele

- 1.) **Gerade in \mathbb{R}^2 :** $\mathbb{R} \ni t \mapsto (at+b, ct+d)$ mit gegebenen Werten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Tangentenvektor in t : $(a, c) \in \mathbb{R}^2$.
Es liegt also eine reguläre Kurve vor, falls $(a, c) \neq (0, 0)$.
- 2.) **Kreislinie in \mathbb{R}^2 :** $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) = e^{it}$
Tangentenvektor ie^{it} hat überall Länge 1 (= konstante Geschwindigkeit), die Kurve ist überall regulär, jeder Punkt wird ∞ oft durchlaufen. Es ist

$$\text{Spur} = S^1 := \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

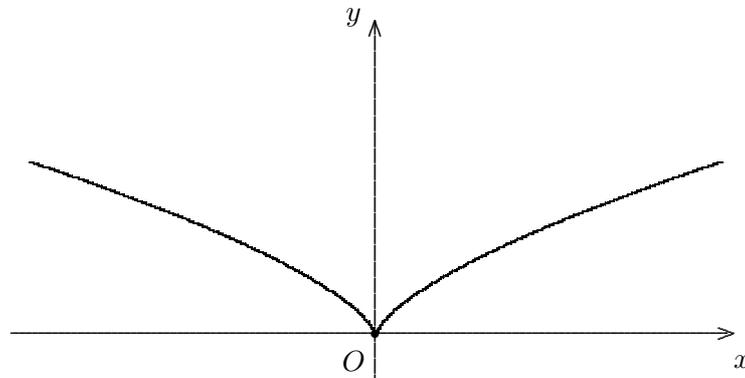
Offenbar haben

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \alpha(t) &:= e^{it}, \\ \beta : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \beta(t) &:= e^{2it}, \\ \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(t) &:= e^{-it} \end{aligned}$$

alle S^1 als Spur. Die Parametrisierung β hat die doppelte Geschwindigkeit von α ($\beta'(t) = 2ie^{it} \Rightarrow |\beta'(t)| \equiv 2 = 2|\alpha'(t)|$), bei γ wird S^1 entgegengesetzt zum Durchlaufsinne von α passiert.

- 3.) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) := (t, |t|)$, ist **keine differenzierbare Kurve**,

4.) die **Neil'sche Parabel** $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) := (t^3, t^2)$ hingegen schon.



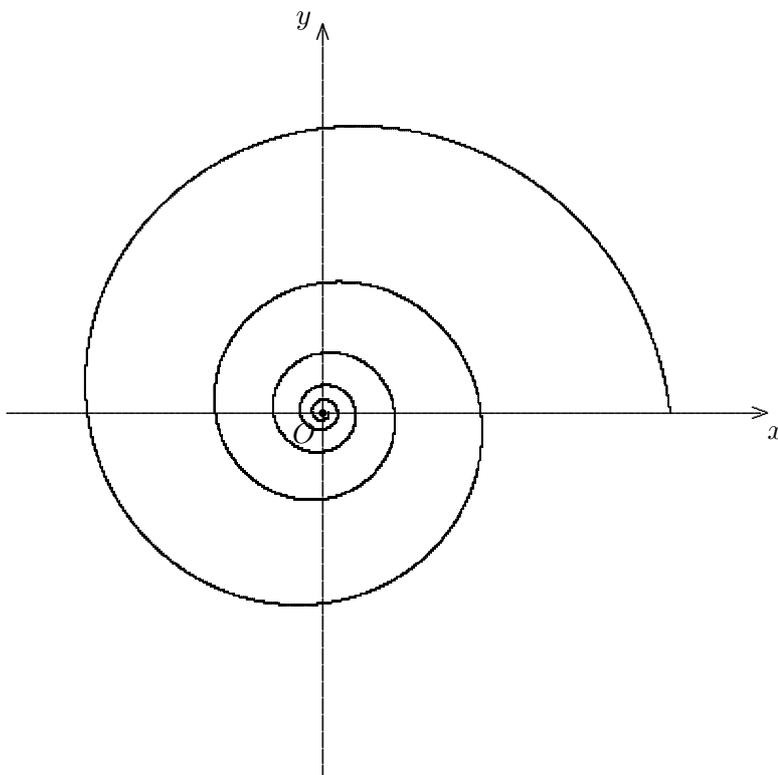
Neil'sche Parabel

Sie erfüllt mit $x = x(t) = t^3, y = y(t) = t^2$ die Gleichung

$$y^3 = x^2 \quad (\Leftrightarrow y = |x|^{2/3}),$$

d.h. ihre Spur ist der Graph der reellen Funktion $x \mapsto |x|^{2/3}$. Dieser Graph hat in $(0,0)$ eine "Spitze". Augenscheinlich existiert keine Tangente, und dies entspricht dem Umstand, dass $t = 0$ singulärer Punkt von α ist. Bei $t \rightarrow 0$ wird $|\alpha'(t)|$ immer kleiner, so dass **die Spitze mit Geschwindigkeit 0 durchlaufen wird**.

5.) **Logarithmische Spirale:** Sei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) := (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, mit Konstanten $a > 0, b < 0$. Die Anteile $\cos t, \sin t$ beschreiben eine Bewegung um $(0,0)$, die sich bei $t \rightarrow \infty$ auf Grund des Anteils e^{bt} mit $b < 0$ immer enger zusammenzieht, bei $t \rightarrow -\infty$ dagegen immer weiter von $(0,0)$ entfernt.



Logarithmische Spirale

Bis jetzt haben wir im Sinne der Definition “Kurven” als Abbildungen $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ angesehen. In der Praxis hat man es oft mit “1-dimensionalen” Punktmengen in \mathbb{R}^n zu tun, die noch gar nicht parametrisiert sind. Dann stellt sich die Frage, ob eine reguläre Parametrisierung zumindest lokal möglich ist. Allgemein führt dies auf den Begriff der 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n als natürliche Verallgemeinerung parametrisierter Kurven. Darauf wollen wir nicht eingehen. Stattdessen betrachten wir Beispiele:

1.) **Implizite Kurven** (ebener Fall)

- a) Die Gleichung $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, beschreibt die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$$

in der Ebene. Ist $b \neq 0$, so ist M der Graph von $x \mapsto -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, m.a.W.: $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b})$, ist eine reguläre Parametrisierung von M . Für $a \neq 0$ gilt entsprechend $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$, und eine reguläre Parametrisierung wird geleistet von $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) := (-\frac{b}{a}t - \frac{c}{a}, t)$.

- b) Sei allgemeiner $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Ist $(x_0, y_0) \in M$ und gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so findet man ein Intervall I um x_0 und eine Funktion $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$M \cap \text{Umgebung von } (x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R}^2 = \{(t, \omega(t)) : t \in I\},$$

d.h. M ist lokal bei (x_0, y_0) durch

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (t, \omega(t))$$

regulär parametrisiert. (Es gilt $\alpha'(t) = (1, \omega'(t)) \neq (0, 0)$.) Entsprechend kann man im Fall $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ die Menge M lokal bei (x_0, y_0) in der Form $(\tilde{\omega}(t), t), t \in \text{Intervall um } y_0$, parametrisieren.

Beweis: Satz über implizite Funktionen.

- c) Im konkreten Fall gibt die Theorie oft nur unbefriedigende Antworten, was z.B. die Größe des Auflösungsintervalls angeht. Man rechnet besser direkt: Für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, R > 0$, sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\},$$

also die Kreislinie mit Radius R um (x_0, y_0) . Eine mögliche (globale!) reguläre Parametrisierung ist natürlich

$$t \mapsto (x_0, y_0) + R e^{it} = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Alternativ kann man M als Vereinigung der beiden Graphen von

$$x \mapsto y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \quad |x - x_0| \leq R,$$

$$x \mapsto y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \quad |x - x_0| \leq R$$

(oberer und unterer Halbkreis) darstellen oder M als Vereinigung "zweier Graphen über der y -Achse" schreiben (Auflösung nach x).

- d) Eine **Ellipse** mit den Halbachsen $a, b > 0$ wird gegeben durch die Gleichung $(f(x, y) = 1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2})$

$$(*) \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$ fixiert. Sei o.E. $a > b$, $\rho := \sqrt{a^2 - b^2}$. Man definiert die Brennpunkte

$$e_{\pm} := (x_0 \pm \rho, y_0)$$

sowie die Abstandssumme

$$d := |(x, y) - e_+| + |(x, y) - e_-|$$

eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit (*) zu den Brennpunkten. Wir wollen zeigen: $d \equiv \text{const.}$ Ohne Einschränkung sei $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Dann gilt:

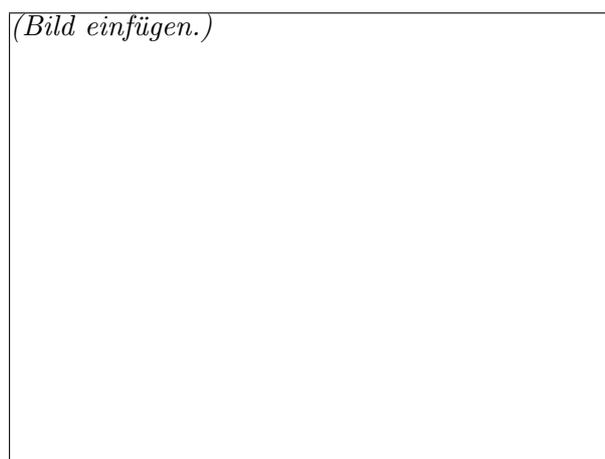
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x + \rho)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \rho)^2 + y^2} \\ \implies (x + \rho)^2 + y^2 &= \left(d - \sqrt{(x - \rho)^2 + y^2}\right)^2 \\ \implies x^2 + 2\rho x + \rho^2 + y^2 &= d^2 - 2d\sqrt{(x - \rho)^2 + y^2} + (x - \rho)^2 + y^2 \\ \implies 4\rho x &= d^2 - 2d\sqrt{(x - \rho)^2 + y^2} \\ \implies 16\rho^2 x^2 + d^4 - 8d^2 \rho x &= 4d^2 ((x - \rho)^2 + y^2) \\ \implies 4d^2 y^2 + (4d^2 - 16\rho^2) x^2 &= d^4 - 4d^2 \rho^2. \end{aligned}$$

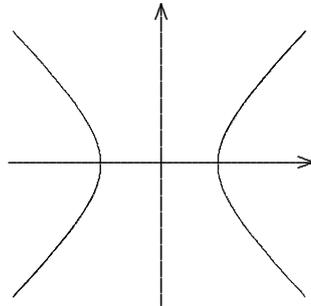
Es folgt: $\frac{4}{d^2 - 4\rho^2} y^2 + \frac{4}{d^2} x^2 = 1$, und (*) ergibt $d = 2a$. Die Gleichung (*) für die Ellipse charakterisiert diese als geschlossene, ebene Kurve, **bei der die Abstandssumme zu zwei festen Punkten konstant ist**. Ähnlich wie beim Kreis kann man die Ellipse auf verschiedene Arten regulär parametrisieren. Eine Möglichkeit ist: $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, denn dann ist mit $\alpha(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{1}{a^2} x(t)^2 + \frac{1}{b^2} y(t)^2 \equiv 1.$$

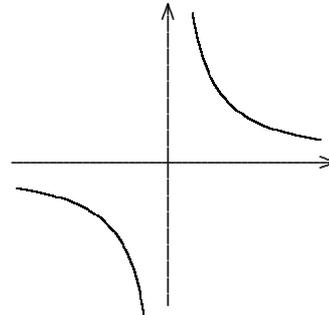
(Hier: $x_0 = y_0 = 0$)

- e) Die Ellipse ist ein spezieller **Kegelschnitt**, also eine durch eine quadratische Gleichung beschriebene ebene Kurve. Wie die Namensgebung besagt, entstehen die Kurven durch Schnitte eines Kreiskegels mit Ebenen, es handelt sich daher strenggenommen um Raumkurven. Vereinfacht dargestellt (identifiziere die Ebene mit \mathbb{R}^2) ergibt sich:

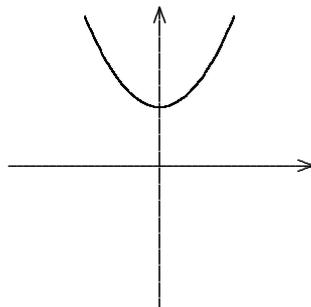


Hyperbeln:

$$x^2 - y^2 = 1$$



$$xy = 1$$

Parabeln:

$$y - x^2 = 1$$

sowie Kreis und Ellipse. Als “Grenzlagen” bekommt man Geraden und einpunktige Mengen.

Übung: Etwas über Kegelschnitte z.B.: schreibe den Kegel(-mantel) als Nullstellenmenge $f(x, y, z) = 0$, wenn die Spitze in $(0, 0, 0)$ liegt, und der Öffnungswinkel vorgegeben ist; berechne den Schnitt mit einer Ebene $g(x, y, z) = 0$, g affin linear

2.) Implizit definierte Raumkurven:

Darunter fallen bereits die Kegelschnitte, allerdings kann man hier den Standpunkt einnehmen, dass es sich nach entsprechender Transformation der Schnittebene um Kurven in \mathbb{R}^2 handelt.

a) Ist $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so beschreibt

$$N_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

unter geeigneten Voraussetzung an f eine Fläche in \mathbb{R}^3 , z.B. erhält man mit $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ die 1-Sphäre S^2 mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Nimmt man noch eine weitere Funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ hinzu, so wird durch $N_f \cap N_g$ im günstigsten Fall ein 1-dimensionales Objekt erzeugt, das unserer Vorstellung von einer Raumkurve entspricht. Allerdings wird keine globale Parametrisierung mitgeliefert. Die Theorie (Satz über implizite Funktionen) liefert folgende Aussage:

Sei $F := (f, g) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, differenzierbar mit $F(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Die Jacobi-Matrix $DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \\ \nabla g(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$ habe den maximalen Rang, etwa

$$\det \begin{pmatrix} \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein Intervall I um x_0 , so dass

$$\begin{aligned} \varphi, \Phi : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } N_f \cap N_g \cap \text{Umgebungen von } (x_0, y_0, z_0) \\ = \{t, \varphi(t), \Phi(t) : t \in I\}. \end{aligned}$$

Setzt man also $\alpha(t) := (t, \varphi(t), \Phi(t))$, so ist $\alpha'(t) = (1, \varphi'(t), \Phi'(t)) \neq 0$. Wir haben also durch α zumindest lokal eine reguläre Parametrisierung gefunden.

Achtung: Ist $\det \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0$, so ist $\alpha(t)$ zu ersetzen durch

$$\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{\varphi}(t), t, \tilde{\Phi}(t)).$$

- b) i) Sind in $f(x, y, z) := ax + by + cz + d$, $g(x, y, z) := Ax + By + Cz + D$ die Vektoren (a, b, c) und (A, B, C) **linear unabhängig**, so ist $N_f \cap N_g$ **eine Gerade in \mathbb{R}^3** .
- ii) Mit $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$ und $g(x, y, z) := ax + by + cz + d$ gilt: N_f ist ein Kegel mit Spitze in $(0, 0, 0)$, N_g eine Ebene und durch passende Wahlen von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bekommt man die Kegelschnitte.

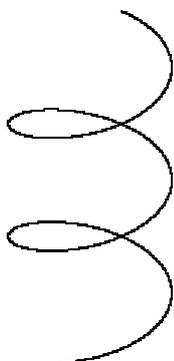
Zum Abschluss noch ein Beispiel für parametrisierte Raumkurven, nämlich die

Helix (Schraubenlinie):

Sei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) := (a \cos t, a \sin t, bt)$ mit $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Die Spur dieser Kurve liegt auf dem Zylindermantel $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$ und "schraubt" sich mit Geschwindigkeit b in Richtung der z-Achse.

Es gilt:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \neq 0.$$



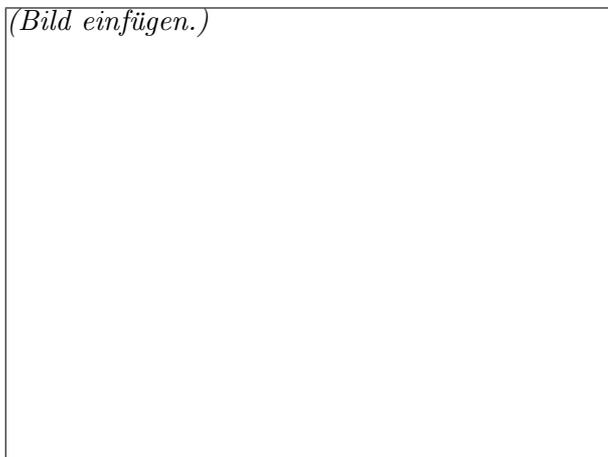
Helix

Ab jetzt betrachten wir nur noch **reguläre Kurven** $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

DEFINITION (Bogenlänge)

Sei $t_0 \in I$ gegeben. Dann heißt die Funktion $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s(t) := \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau$ die Bogenlänge von α bzgl. t_0 .

(Bild einfügen.)



Sei etwa $t_0 < t$. Man unterteilt $[t_0, t]$ in der Form $t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ mit Teilpunkten t_i und ersetzt das Kurvenstück $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ durch die Strecke von $\alpha(t_{i-1})$ nach $\alpha(t_i)$. Die ‐Länge der Kurve $\alpha|_{[t_0, t]}$ ‐ wird dann anschaulich genähert durch

$$\sum_{j=1}^k |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^k \frac{|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|}{t_j - t_{j-1}} (t_j - t_{j-1}) \rightarrow \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau,$$

wobei im Grenzübergang die Einteilung von $[t_0, t]$ immer feiner gemacht wird.

Folgerung aus der Definition:

Wegen $|\alpha'(\tau)| > 0$ ist $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$, d.h. die Bogenlänge ist streng monoton wachsend und besitzt daher eine Umkehrfunktion $\varphi : J \rightarrow I$, wobei $J := \text{Bild}(s) =$

Intervall in \mathbb{R} . (Bemerke: für $t < t_0$ ist $s(t) < 0$, so dass J auch negative Zahlen enthält, es sei denn, die Wahl $t_0 =$ linker Endpunkt von I ist möglich). Damit betrachtet man die

Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge:

$$\bar{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \bar{\alpha}(\tau) := \alpha(\varphi(\tau)).$$

Es gilt für $\tau \in J$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}'(\tau) &= \alpha'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau), \\ \varphi'(\tau) &= \frac{1}{s'(\varphi(\tau))} = |\alpha'(\varphi(\tau))|^{-1}, \end{aligned}$$

d.h.:

$$|\bar{\alpha}'| \equiv 1 \quad \text{auf } J.$$

Ergebnisse:

- (i.) Man kann jede **reguläre** Kurve nach der Bogenlänge umparametrisieren.
- (ii.) Dabei bleibt die Spur erhalten, ebenso der Durchlaufsinne, denn $\bar{\alpha}'(\tau) = \frac{\alpha'(\varphi(\tau))}{|\alpha'(\varphi(\tau))|}$.
- (iii.) Das Parameterintervall ändert sich, die Durchlaufgeschwindigkeit wird auf 1 normiert.

Bemerkung:

Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\psi : I \rightarrow J$ eine differenzierbare Bijektion mit $\psi' \neq 0$ zwischen den Intervallen I und J (also ψ entweder streng fallend oder wachsend), dann ist allgemein $\tilde{\alpha}(s) := \alpha(\psi^{-1}(s))$, $s \in J$ eine Umparametrisierung von α . $\tilde{\alpha}$ ist regulär, wenn α dies ist.

Spezialfall:

$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\alpha} : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\alpha}(t) := \alpha(-t)$. $\tilde{\alpha}$ unterscheidet sich von α nur dadurch, dass die Spur jetzt rückwärts durchlaufen wird (Orientierungsumkehrung).

Anhang zu §1: Vektorprodukt in \mathbb{R}^3 :

Sei $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ die orientierte Standardbasis in \mathbb{R}^3 , also

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Wir einigen uns darauf, diese als **positiv orientiert** zu bezeichnen. Ist $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ eine weitere orientierte Basis in \mathbb{R}^3 , so setzt man

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A\bar{e}_i := \bar{f}_i$$

und nennt $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$ positiv (negativ) orientiert, falls $\det A > 0$ (< 0) ist. A ist die Matrix des Basiswechsels von $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ nach $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$.

Beispiel:

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) := (\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_2).$$

Dann ist $A\bar{e}_1 = \bar{e}_1$, $A\bar{e}_2 = \bar{e}_3$, $A\bar{e}_3 = \bar{e}_2$, die Transformationsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\hat{=} (A\bar{e}_1, A\bar{e}_2, A\bar{e}_3))$$

mit

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ beliebig und tragen wir diese Vektoren als z.B. Spalten in eine Matrix ein, so ist

$$\det(u \ v \ w)$$

nach den Eigenschaften von \det in jedem Argument eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, wenn die beiden jeweils anderen Argumente fixiert sind. Wir betrachten

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \ni w \mapsto \det(u \ v \ w)$$

und benutzen:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ist } \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear, so gibt es genau einen Vektor } \eta \in \mathbb{R}^3 \\ \text{mit } \varphi(w) = w \cdot \eta \quad \forall w \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

η stellt φ bzg. des Euklidischen Skalarprodukts

$$w \cdot \eta = \sum_{i=1}^3 w_i \eta_i$$

dar. Im Fall des Funktionals Φ hängt η von u und v ab und wird mit $u \times v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

DEFINITION:

Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $u \times v$ (oder $u \wedge v$) den eindeutigen Vektor aus \mathbb{R}^3 mit

$$(u \times v) \cdot w = \det(u \ v \ w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3.$$

$u \times v$ heißt das **Vektorprodukt von u mit v** (Reihenfolge!).

Formel für $u \times v$:

Es ist für

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i \bar{e}_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{e}_i, \quad w = \sum_{i=1}^3 w_i \bar{e}_i$$

$$\det(u \ v \ w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$

wenn man die 3×3 Determinante nach der letzten Spalte entwickelt. Setzt man

$$u \times v = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3,$$

so folgt $(u \times v) \cdot w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$, und Vergleich ergibt

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \bar{e}_3.$$

Rechenregeln für $u \times v$: ($u, v \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

- i) $u \times v = -v \times u$
- ii) $(\alpha u + \beta \tilde{u}) \times v = \alpha u \times v + \beta \tilde{u} \times v$
- iii) $u \times v = 0 \iff u, v$ linear abhängig
- iv) $u \times v \perp u$ und $u \times v \perp v$, d.h. $(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$.

Beweis:

Man benutzt $(u \times v) \cdot w = \det(u \ v \ w)$, also $(v \times u) \cdot w = \det(v \ u \ w) = -\det(u \ v \ w) = -(u \times v) \cdot w$, und da w beliebig ist folgt i).

Für ii) beachte die Linearität von $u \mapsto \det(u \ v \ w)$.

iii) Es ist $u \times v = 0 \iff \det(u \ v \ w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}^3$, und das ist äquivalent zur linearen Abhängigkeit von u und v .

iv) klar, da z.B. $(u \times v) \cdot u = \det(u \ v \ u) = 0$. □

Bemerkungen:

- 1.) Seien u, v linear unabhängig. Dann gilt:

$$0 < |u \times v|^2 = (u \times v) \cdot (u \times v) = \det(u \ v \ u \times v),$$

mithin ist $(u, v, u \times v)$ eine positiv orientierte Basis.

- 2.) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Dann erzeugen sie ein Parallelogramm mit Fläche $A = |u|h$, $h :=$ Höhe $= |v| \sin \theta$. Hierbei ist θ der Winkel zwischen u und v , also $\cos \theta = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{v}{|v|}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |u \times v|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= \dots = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2 \\ &= |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = A^2 \end{aligned}$$

d.h. $|u \times v|$ ist der Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms.

3.) Sind $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so gilt die **Produktregel**

$$\frac{d}{dt} (u(t) \times v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$$

§ 2 Lokale Kurventheorie im \mathbb{R}^3

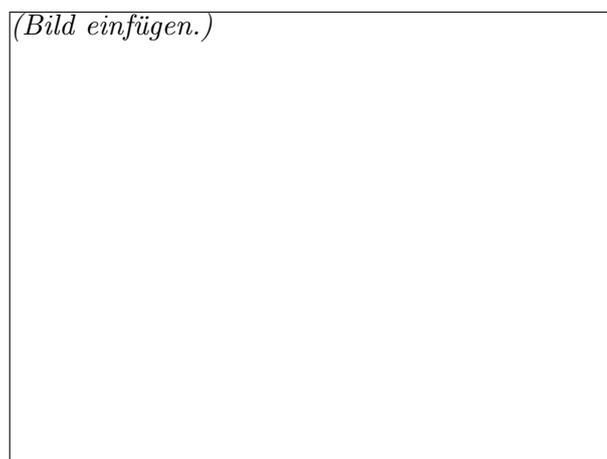
Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, und betrachtet man die Funktion $t \mapsto \alpha'(t)$, so misst deren Änderung in der Nähe von t_0 einerseits (bezogen auf die Länge der Vektoren) eine Änderung der Durchlaufgeschwindigkeit und andererseits eine Änderung des Winkels zwischen $\alpha'(t)$ und $\alpha'(t_0)$, und nur diese Winkeländerung beschreibt die geometrische Größe, die man mit dem Begriff Krümmung verbindet. Aus diesem Grund macht es Sinn, nachfolgend alle Kurven nach der Bogenlänge zu parametrisieren ($|\alpha'| \equiv 1$) sonst müsste man mehr oder weniger mit $\frac{\alpha'}{|\alpha'|}$ rechnen, und das ist recht umständlich.

DEFINITION: (Krümmung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach der **Bogenlänge parametrisierte Kurve**. Man nennt

$$\kappa(t) := |\alpha''(t)| \geq 0$$

die **Krümmung von α bei $t \in I$** .



Geraden sollten dadurch charakterisiert sein, dass ihre Krümmung verschwindet: Ist $\alpha(t) = tu + v$ mit $u, v \in \mathbb{R}^3$, und $|u| = 1$ (Parametrisierung nach der Bogenlänge), so gilt $\alpha'' \equiv 0$, also $\kappa \equiv 0$. Ist umgekehrt $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa \equiv 0$, so folgt $\beta'' = 0$ und nach zweimaliger Integration) $\beta(t) = \eta t + \xi$ mit $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$. **Dagegen sollten Kreise konstante Krümmung $\neq 0$**

haben: Sei etwa $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (re^{it}, 0)$, $r > 0$. Hier müssen wir zunächst nach der Bogenlänge umparametrisieren. Es ist ($t_0 := 0$)

$$s(t) := \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau = rt$$

mit $s([0, 2\pi]) = [0, 2\pi r]$, so dass sich als Umparametrisierung nach der Bogenlänge ergibt:

$$\tilde{\alpha} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \tilde{\alpha}(s) := \alpha(s/r).$$

Die Krümmung von $\tilde{\kappa}$ von $\tilde{\alpha}$ ist gemäß

$$\tilde{\alpha}''(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \alpha'(s/r) \right) = \frac{1}{r^2} \alpha''(s/r) = \frac{1}{r} (-e^{is/r}, 0)$$

dann gegeben durch $1/r$. Anders gesagt: **Die Krümmung der Kreislinie ist umgekehrt proportional zum Radius.** Ist $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert und β die umgekehrt durchlaufene Kurve, also $\beta(s) := \alpha(-s)$ für $s \in J := \{-\tau : \tau \in I\}$, so gilt

$$\beta'(s) = -\alpha'(-s) \implies |\beta'| \equiv 1$$

und $\beta''(s) = \alpha''(-s)$, so dass $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$ ist.

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann ist $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) \equiv 1$ also

$$0 = \alpha'(s) \cdot \alpha''(s).$$

Schreibt man $t(s)$ für den **Einheitstangentenvektor** $\alpha'(s)$ und definiert für $\kappa(s) \neq 0$ den **Normalen- oder Hauptvektor**

$$n(s) := \frac{t'(s)}{|t'(s)|} = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)},$$

so gilt

$$t(s) \cdot n(s) = 0,$$

der Hauptnormalenvektor ist senkrecht zum Einheitstangentenvektor.

DEFINITION:

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

- Punkte $s \in I$ mit $\kappa(s) = 0$ ($\iff \alpha''(s) = 0$) heißen **singuläre Punkte der Ordnung 1**. In singulären Punkten der Ordnung 1 ist der Normalenvektor nicht definiert.
- Ist $\kappa(s) \neq 0$, so heißt die von $t(s)$ und $n(s)$ in \mathbb{R}^3 aufgespannte Ebene **die Schmiegebene** bei s . (engl. osculating plane)

Nachfolgend sei $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Offenbar gilt

$$(1) \quad \boxed{t'(s) = \kappa(s)n(s)} \quad ,$$

denn $t'(s) = \alpha''(s) = |\alpha''(s)| \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \kappa(s)n(s)$. Da es keine singulären Punkte der Ordnung 1 geben soll, ist

$$\boxed{b(s) := t(s) \times n(s)}$$

wohldefiniert für alle $s \in I$ und hat wegen $|t| \equiv 1 \equiv |n|$, $t \cdot n = 0$ Länge 1. Ferner ist $b(s)$ senkrecht zur Schmiegeebene.

$b(s)$ heißt **Binormalenvektor** in s .

DEFINITION: Frenet'sches Dreibein

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Ist $\kappa(s) \neq 0$, so bilden die Vektoren $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ in dieser Reihenfolge eine **positiv** orientierte **Orthonormalbasis** von \mathbb{R}^3 , die das **Frenet'sche Dreibein** genannt wird.

Als Maß für die Änderung der Schmiegeebene kann man die Größe $|b'(s)|$ ansehen.
Was kann man über den Vektor $b'(s)$ sagen?

Es ist

$$\begin{aligned} b'(s) &= \frac{d}{ds}(t(s) \times n(s)) \\ &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &\stackrel{(1)}{=} \kappa(s) \underbrace{n(s) \times n(s)}_{=0} + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s) \end{aligned}$$

So dass $b'(s) \perp t(s)$. Aus $|b(s)| = 1$ folgt

$$0 = \frac{d}{ds}(b(s) \cdot b(s)) = 2b'(s) \cdot b(s),$$

also $b'(s) \perp b(s)$.

Wenn aber $b'(s)$ senkrecht ist zu $t(s)$ und $b(s)$, dann muss wegen ONB-Eigenschaft von t , n , b der Vektor $b'(s)$ an jeder Stelle s skalares Vielfaches von $n(s)$ sein.

DEFINITION:

Es sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\alpha''(s) \neq 0$ auf I , also $\kappa > 0$. Dann gibt es genau eine Funktion $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(2) \quad \boxed{b'(s) = \tau(s)n(s), \quad s \in I.}$$

$\tau(s)$ heißt Torsion (oder Windung) von α bei s .

Schließlich berechnen wir noch die Änderung $n'(s)$ des Normalenvektors:

Mit $n = b \times t$ gilt (beachte: $b = t \times n \Rightarrow b \times t = (t \times n) \times t = (t \cdot t)n - (n \cdot t)t = n$)

$$\begin{aligned} n'(s) &= \frac{d}{ds}(b(s) \times t(s)) \\ &= b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} \tau(s)n(s) \times t(s) + \kappa(s)b(s) \times n(s) \\ &= -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s), \end{aligned}$$

wobei wir $b \times n \stackrel{Def.b}{=} (t \times n) \times n = -t$ benutzt haben. Es folgt

$$(3) \quad \boxed{n'(s) = -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s), \quad s \in I.}$$

Wir fassen unsere Rechnungen (1)–(3) zusammen:

SATZ: Frenet'sche Formeln

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(s) = |\alpha''(s)| > 0$. Dann erfüllt das Frenet'sche Dreibein (t, n, b) das Differentialgleichungssystem

$$(\star) \quad \boxed{\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t - \tau b \\ b' &= \tau n \end{aligned}} \quad \text{auf dem Intervall } I.$$

Bemerkungen

- 1.) Das Frenet'sche Dreibein ist eine Funktion $(t, n, b) : I \rightarrow \mathbb{R}^9$, links in (\star) steht die erste Ableitung dieser Funktion, rechts vom Gleichheitszeichen steht eine

Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^3$, die sich aus Komponenten von (t, n, b) teilweise versehen mit den Gewichtsfunktionen κ und τ zusammensetzt.

- 2.) Physikalisch kann man sich eine Raumkurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadurch erzeugt denken, dass man eine Gerade biegt (“Krümmung”) und gleichzeitig verdreht (“Torsion”). Dies führt auf folgende Frage: Sei I ein Intervall um z.B. 0, auf dem Funktionen $\kappa : I \rightarrow (0, \infty)$, $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind. Außerdem sei eine positiv orientierte ONB (t_0, n_0, b_0) von \mathbb{R}^3 fixiert.

Gibt es dann eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(t(0), n(0), b(0)) = (t_0, n_0, b_0)$, deren Krümmung und Torsion gerade κ bzw. τ ist? Wenn ja, wie steht es mit der Eindeutigkeit? Dies führt auf den Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie, der aussagt, dass es bei Vorgabe von κ und τ eine im wesentlichen eindeutige Kurve gibt.

- 3.) Folgende Bezeichnungen sind üblich

rektifizierende Ebene	:= die von t und b aufgespannte Ebene,
Normalebene	:= die von n und b aufgespannte Ebene,
Haupt- bzw. Binormale	:= Gerade durch $\alpha(s)$ in Richtung $n(s)$ bzw. $b(s)$,
Krümmungsradius	:= $1/\kappa$.

Spezialfall: Ebene Kurven und orientierte Krümmung

Wir betrachten eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(I) \subset \text{Ebene in } \mathbb{R}^3$, o.E.

$$\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

Außerdem sei $\alpha''(s) \neq 0$. Dann gilt ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$)

$$\begin{aligned} t(s) &= (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), 0), \\ n(s) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\kappa(s)} t'(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (\alpha_1''(s), \alpha_2''(s), 0), \end{aligned}$$

also

$$b(s) = t(s) \times n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (0, 0, \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)).$$

Per Definition wird die Schmiegebene von $t(s)$ und $n(s)$ aufgespannt, die Formeln für t und n liefern:

$$\text{Schmiegebene in } s = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

d.h. $b \equiv (0, 0, 1)$ oder $\equiv (0, 0, -1)$, denn b steht auf der Schmiegebene senkrecht mit Länge 1. Die Konstanz von b bedeutet aber $\tau \equiv 0$.

Sei umgekehrt $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $\kappa > 0$, aber $\tau \equiv 0$. Dann ist $b'(s) \stackrel{(2)}{=} 0$, also $b \equiv b_0$ für einen (konstanten) Einheitsvektor b_0 . Es folgt:

$$\frac{d}{ds} (\beta(s) \cdot b_0) = \beta'(s) \cdot b_0 = t(s) \cdot b(s) \equiv 0,$$

d.h. $\beta(I)$ liegt in einer Ebene senkrecht zu b_0 .

Damit ist gezeigt

SATZ:

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Dann gilt:

Torsion $\tau \equiv 0 \iff$ Spur $\alpha \subset$ Ebene in \mathbb{R}^3

Beschränkt man sich also direkt auf ebene Kurven, so ist die Torsion keine geometrisch relevante Größe, dafür kann man den Krümmungsbegriff verfeinern: Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa(s) = |\alpha''(s)| > 0$. Sei (e_1, e_2) die positiv orientierte ONB von \mathbb{R}^2 .

(Bild einfügen.)

In \mathbb{R}^2 kann der Einheitstangentenvektor $t(s)$ eindeutig durch einen Vektor $\tilde{n}(s)$ zu einer **positiven** ONB $(t(s), \tilde{n}(s))$ ergänzt werden. Man nennt $\tilde{n}(s)$ den **Hauptnormalenvektor** der ebenen Kurve α und hat wegen $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$, also

$$t(s) \cdot t'(s) = 0,$$

offensichtlich die Beziehung

$$t'(s) = \tilde{\kappa}(s) \tilde{n}(s)$$

mit einer Funktion $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINITION:

Mit obigen Notationen heißt $\tilde{\kappa}$ die **orientierte Krümmung** der ebenen Kurve α .

Eigenschaften

- 1.) $|\tilde{\kappa}(s)| = \kappa(s)$.
- 2.) Im Unterschied zu κ ändert $\tilde{\kappa}$ beim Rückwärtsdurchlaufen das Vorzeichen (Übung).

Diskussion der geometrischen Größen für allgemeine (reguläre) Raumkurven: Formeln für κ_α , τ_α

Sei jetzt $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine **reguläre** Raumkurve, also $|\alpha'(t)| > 0$ überall, die **nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisiert**. Um Krümmung, Torsion, ect., von α erklären zu können, müssen wir α nach der Bogenlänge parametrisieren. Dies ist nicht eindeutig (Wahl des Fußpunktes!), so dass wir nur dann sinnvoll unsere Begriffe übertragen können, wenn die Ergebnisse nicht von der Umparametrisierung abhängen. Das wird aber das Ergebnis der folgenden Rechnung sein.

Notation:

$s = s(u)$ Bogenlänge, $u \in I$; $J := \text{Bild der Bogenlängenfunktion} = s(I)$; $u = u(s)$ Umkehrfunktion der Bogenlänge $J \rightarrow I$; $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta(s) := \alpha(u(s))$, Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge \implies

$$(1) \quad u'(s) = |\alpha'(u(s))|^{-1},$$

$$(2) \quad u''(s) \stackrel{(1)}{=} -|\alpha'(u(s))|^{-2} \frac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} \cdot \alpha''(u(s))u'(s) \\ = -|\alpha'(u(s))|^{-4} \alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s)).$$

Es gilt

$$\beta'(s) = \alpha'(u(s))u'(s) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}(u(s)),$$

und für die Krümmung hat man per Definition

$$\kappa_\beta(s) = |\beta''(s)|,$$

so dass $\beta''(s)$ auszurechnen ist:

$$\begin{aligned}\beta''(s) &= \frac{d}{ds}(\alpha'(u(s))u'(s)) \\ &= \alpha''(u(s))(u'(s))^2 + \alpha'(u(s))u''(s) \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} \frac{\alpha''(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^2} - \frac{\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^4} \alpha'(u(s)).\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}|\kappa_\beta(s)|^2 &= \beta''(s)\beta''(s) \\ &= \frac{|\alpha''(u(s))|^2}{|\alpha'(u(s))|^4} - 2\frac{(\alpha'(u(s)) \cdot \alpha''(u(s)))^2}{|\alpha'(u(s))|^6} + \frac{(\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s)))^2}{|\alpha'(u(s))|^6} \\ &= |\alpha'(u(s))|^{-6}[|\alpha'(u(s))|^2|\alpha''(u(s))|^2 - (\alpha'(u(s)) \cdot \alpha''(u(s)))^2] \\ &= |\alpha'(u(s))|^{-6}|\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))|^2,\end{aligned}$$

also

$$(3) \quad \kappa_\beta(s) = |\alpha'(u(s))|^{-3}|\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))|.$$

Definiert man daher die **Krümmung von α** als

$$\boxed{\kappa_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa_\alpha(u) := |\alpha'(u)|^{-3}|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|},$$

so ist $\kappa_\alpha(u)$ die Krümmung $\kappa_\beta(s(u))$ der Umparametrisierung nach der Bogenlänge an der Stelle $s(u) \in J$. (Ist α bereits nach der Bogenlänge parametrisiert, so hat man eine Formel für die bekannte Krümmung!) Für die Torsion τ_β gilt wegen $b'_\beta(s) = \tau(s)n_\beta(s)$:

$$\tau_\beta(s) = b'_\beta(s) \cdot n_\beta(s)$$

$$\text{mit } b_\beta(s) := t_\beta(s) \times n_\beta(s), n_\beta(s) := \frac{t'_\beta(s)}{|t'_\beta(s)|}$$

und $t_\beta(s) = \beta'(s)$. Wir berechnen zunächst (in der zweiten Zeile werden die Frenet'schen Formeln verwendet)

$$\begin{aligned}b'_\beta(s) &= \frac{d}{ds}(t_\beta(s) \times n_\beta(s)) = t'_\beta(s) \times n_\beta(s) + t_\beta(s) \times n'_\beta(s) \\ &= \kappa(s)(n_\beta(s) \times n_\beta(s)) + t_\beta(s) \times n'_\beta(s) = t_\beta(s) \times n'_\beta(s).\end{aligned}$$

Damit folgt (benutze $n_\beta = \frac{1}{\kappa_\beta} t'_\beta$, 1^{te} Frenet'sche Formel und $t_\beta = \beta'$):

$$\begin{aligned}
 \tau_\beta(s) &= (t_\beta(s) \times n'_\beta(s)) \cdot n_\beta(s) = \det(t_\beta(s), n'_\beta(s), n_\beta(s)) \\
 &= \det\left(\beta'(s), \left(\frac{1}{\kappa_\beta(s)} t'(s)\right)', \frac{1}{\kappa_\beta(s)} t'_\beta(s)\right) \\
 &= \det\left(\beta'(s), \left(\frac{1}{\kappa_\beta(s)} \beta''(s)\right)', \frac{1}{\kappa_\beta(s)} \beta''(s)\right) \\
 &= \underbrace{\det\left(\beta'(s), \left(\frac{1}{\kappa_\beta(s)}\right)', \beta''(s), \frac{1}{\kappa_\beta(s)} \beta''(s)\right)}_{=0, \text{ da Spalte 2 + 3 l.a.}} \\
 &\quad + \det\left(\beta'(s), \frac{1}{\kappa_\beta(s)} \beta'''(s), \frac{1}{\kappa_\beta(s)} \beta''(s)\right) \implies \\
 \tau_\beta(s) &= \kappa_\beta(s)^{-2} \det(\beta'(s) \beta'''(s), \beta''(s)).
 \end{aligned}$$

Nun benutzt man noch $\beta'(s) = \frac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|}$, berechnet damit β'', β''' , um zu sehen:

$$\begin{aligned}
 \tau_\beta(s) &= \kappa_\beta(s)^{-2} |\alpha'(u(s))|^{-6} \cdot \det(\alpha'(u(s)), \alpha'''(u(s)), \alpha''(u(s))) \\
 &= -|\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))|^{-2} (\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))) \cdot \alpha'''(u(s)).
 \end{aligned}$$

Damit definiert man die **Torsion** $\tau_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ von α durch

$$\tau_\alpha(u) := -\frac{\alpha'(u) \times \alpha''(u)}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|^2} \cdot \alpha'''(u).$$

$\tau_\alpha(u)$ entspricht der Torsion $\tau_\beta(s(u))$, der nach der Bogenlänge umparametrisierten Kurve $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $s(u)$. **Ist α selbst nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist eine Formel für die Torsion abgeleitet.**

Anmerkungen:

- 1.) Die Formeln für κ_α und τ_α zeigen, dass es günstiger ist, mit nach der Bogenlänge parametrisierten Kurven zu arbeiten.
- 2.) (Übung!) Im Spezialfall einer regulären, ebenen Kurve $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ bekommt man mit analogen Rechnungen als kanonische Definition für die orientierte Krümmung $\tilde{\kappa}_\alpha(u) = (x'(u)^2 + y'(u)^2)^{-3/2} [x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)]$, d.h. $\tilde{\kappa}_\alpha(u)$ ist die orientierte Krümmung $\tilde{\kappa}_\beta(s(u))$ der Umparametrisierung β von α nach der Bogenlänge s . Im Fall einer ebenen Graphenkurve

$$\alpha(u) = (u, f(u)), \quad u \in I,$$

über der x -Achse mit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt das:

$$\tilde{\kappa}_\alpha(u) = f''(u)(1 + f'(u)^2)^{-3/2}.$$

Bevor wir den Hauptsatz der lokalen Kurventheorie diskutieren, widmen wir uns der **geometrischen Interpretation von Krümmung, Torsion, ect.:**

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa > 0$. Sei $s_0 \in I$, o.E. $s_0 = 0$. Nach Taylor gilt

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{1}{2}s^2\alpha''(0) + \frac{1}{6}s^3\alpha'''(0) + R(s)$$

mit $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-3}R(s) = 0$ für das Restglied $R(s)$. Um diese Entwicklung vornehmen zu können, reicht die Information $\alpha \in C^4(I, \mathbb{R}^3)$. Wir haben

$$\alpha'(0) = t(0), \alpha''(0) = \kappa(0)n(0)$$

und erhalten nach den Frenet'schen Formeln

$$\begin{aligned} \alpha'''(s) = t''(s) &= (\kappa(s)n(s))' = \kappa'(s)n(s) + \kappa(s)n'(s) \\ &= \kappa'(s)n(s) - \kappa^2(s)t(s) - \kappa(s)\tau(s)b(s), \end{aligned}$$

und mit Abkürzungen

$$t = t(0), n = n(0), b = b(0), \kappa = \kappa(0), \kappa' = \kappa'(0), \tau = \tau(0)$$

folgt:

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{\kappa^2 s^3}{6}\right)t + \left(\frac{\kappa s^2}{2} + \frac{\kappa' s^3}{6}\right)n - \frac{\kappa\tau s^3}{6}b + R(s).$$

Nach Translation und Drehung kann man erreichen $\alpha(0) = 0$, $(t, n, b) = (e_1, e_2, e_3)$. Schreibt man noch $R = (R_x, R_y, R_z)$, so ergibt sich die **lokale Normalform:**

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3 + R_x(s), \\ y(s) &= \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\kappa' s^3 + R_y(s), \\ z(s) &= -\frac{1}{6}\kappa\tau s^3 + R_z(s). \end{aligned}$$

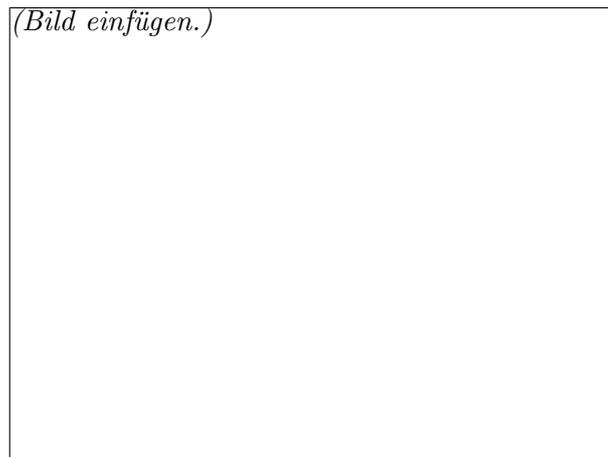
Natürlich ist diese lokale Normalform gemäß Herleitung nur gültig in einer Umgebung von $s_0 = 0$. Für $|s| \ll 1$ dominieren die Potenzen der jeweils niedrigsten Ordnung, d.h.: Die Projektion von $\alpha(s)$ in die

(x, y) -Ebene $(\hat{=}$ Anteil $(x(s), y(s))$) ist die Kurve $s \mapsto (s, 1/2\kappa s^2)$,
Schmiegeebene

(x, z) -Ebene $(\hat{=}$ Anteil $(x(s), z(s))$) ist die Kurve $s \mapsto (s, -1/6\kappa\tau s^3)$,
rektifizierende Ebene

(y, z) -Ebene $(\hat{=}$ Anteil $(y(s), z(s))$) ist die Kurve $s \mapsto (1/2\kappa s^2, -1/6\kappa\tau s^3)$,
Normalebene

wobei wir nach obiger Bemerkung die niedrigsten Potenzen übertragen haben. Es ergeben sich folgende Bilder für die Projektion von $\alpha(s)$ lokal bei 0:

**Beispiel:**

Sei $\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(s) = \left(R \cos \frac{s}{c}, R \sin \frac{s}{c}, h \frac{s}{c} \right)$$

mit gegebenen Parametern $h > 0, R > 0$ sowie $c := \sqrt{h^2 + R^2}$. Es handelt sich um die auf Normalform parametrisierte Helix, denn

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{R}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{R}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{h}{c} \right)$$

und $|\alpha'(s)| = \left(\frac{R^2}{c^2} + \frac{h^2}{c^2} \right)^{1/2} \equiv 1$. Es gilt also

$$t(s) = \frac{1}{c} \left(-R \sin \frac{s}{c}, R \cos \frac{s}{c}, h \right),$$

$$t'(s) = -\frac{R}{c^2} \left(\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right),$$

und damit folgt $(\kappa(s) = |\alpha''(s)| = |t'(s)|)$

$$\kappa(s) = |t'(s)| = \frac{R}{c^2}$$

sowie $n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} t'(s) = -\left(\cos \frac{s}{c}, \sin \frac{s}{c}, 0 \right)$.

Weiter ist

$$b(s) = t(s) \times n(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{R}{c} \sin \frac{s}{c} & \frac{R}{c} \cos \frac{s}{c} & \frac{h}{c} \\ -\cos \frac{s}{c} & -\sin \frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{h}{c} \sin \frac{s}{c}, -\frac{h}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{R}{c} \right),$$

und gemäß $b'(s) = \tau(s)n(s)$ folgt für die Torsion $\tau(s) \equiv -\frac{h}{c^2}$.

Wie nach den Frenet'schen Formeln angemerkt wurde, legen diese nahe, dass Raumkurven alleine durch Vorgabe von Krümmung und Torsion festgelegt sind bzw. konstruiert werden können. Dies wird präzisiert durch

THEOREM: (Fundamentalsatz der lokalen Kurventheorie)

Sei $I := [s_0, s_1]$ ein Intervall mit $s_0 < s_1$. Gegeben seien differenzierbare Funktionen $\kappa : I \rightarrow (0, \infty)$ und $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\kappa_\alpha (= \text{Krümmung von } \alpha) = \kappa$ und $\tau_\alpha (= \text{Torsion von } \alpha) = \tau$.

- a) Ist $\alpha_0 \in \mathbb{R}^3$ gegeben, und hat man dazu eine positiv orientierte ONB (t_0, n_0, b_0) von Vektoren aus \mathbb{R}^3 fixiert, so gibt es genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ , welche die Anfangsbedingung

$$(\star) \quad \alpha(s_0) = \alpha_0, \quad t_\alpha(s_0) = t_0, \quad n_\alpha(s_0) = n_0, \quad b_\alpha(s_0) = b_0$$

erfüllt.

- b) Verzichtet man auf (\star) und sind α, β nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$ und $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = \kappa$, so folgt $\beta = S\alpha + c$ für eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und einen konstanten Vektor $c \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung:

b) besagt, dass Vorgabe von Krümmung und Torsion die Kurve bis auf eine **starre Bewegung** (= Translation + orthogonale Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) eindeutig bestimmt.

Der Beweis des Theorems benutzt folgende Aussage über Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

Folgerung aus dem Satz von Picard-Lindelöf:

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ und linear in $y \in \mathbb{R}^n$, d.h. $y \mapsto F(s, y)$ ist für jedes $s \in [a, b]$ linear. Dann gibt es zu jeder Vorgabe von $y_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $y'(s) = F(s, y(s))$, $s \in I$, $y(a) = y_0$.

Es handelt sich bei obiger Feststellung um eine Kombination des bekannten **lokalen** Existenzsatzes von Picard-Lindelöf mit einer Abschätzung über die Größenordnung des Existenzintervalls, die für lineare Systeme (mit stetigen Koeffizienten) zur globalen Existenz der Lösung auf ganz $[a, b]$ führt. (Kaballo, Analysis II, 36.1 Satz).

Beweis des Theorems:

Mit etwas unüblicher Notation schreiben wir $\xi = (t, n, b)$, $t = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $n = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$, $b = (\xi_7, \xi_8, \xi_9)$ für die Variable $\xi \in \mathbb{R}^9$. Sodann betrachten wir auf I das Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \xi'(s) = F(s, \xi(s))$$

mit $F(s, \xi) = F(s, t, n, b) := (\kappa(s)n, -\tau(s)b - \kappa(s)t, \tau(s)n)$. Offenbar ist $F(s, \cdot)$ linear in der \mathbb{R}^9 -Variablen, und (1) ist offenbar genau dann erfüllt, wenn die Komponenten $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ von $\xi(s)$ dem System

$$(2) \quad \begin{cases} t'(s) &= \kappa(s)n(s), \\ n'(s) &= -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s), \\ b'(s) &= \tau(s)n(s) \end{cases}$$

der Frenet'schen Differentialgleichungen genügen. Sei $\xi_0 = (t_0, n_0, b_0)$ eine positiv orientierte ONB von \mathbb{R}^3 . Dann gibt es genau eine Lösung $\xi(s) = (t(s), n(s), b(s))$ von (1) bzw. (2) mit

$$(3) \quad \xi(s_0) = \xi_0.$$

Wir zeigen: $\xi(s)$ bleibt für alle s orthonormal, d.h. die Vektoren $t(s), n(s), b(s)$ bilden eine positiv orientierte ONB. Es ist nach (2)

$$\begin{aligned} (t \cdot n)' &= t' \cdot n + t \cdot n' = \kappa(n \cdot n) - \kappa(t \cdot t) - \tau(t \cdot b), \\ (t \cdot b)' &= t' \cdot b + t \cdot b' = \kappa(n \cdot b) + \tau(t \cdot b), \\ (n \cdot b)' &= n' \cdot b + n \cdot b' = -\kappa(t \cdot b) - \tau(b \cdot b) + \tau(n \cdot n), \\ (t \cdot t)' &= 2t \cdot t' = 2\kappa(n \cdot t), \\ (n \cdot n)' &= -2n' \cdot n = -2\kappa(n \cdot t) - 2\tau(n \cdot b), \\ (b \cdot b)' &= 2b \cdot b' = 2\tau(b \cdot n), \end{aligned}$$

und hier treten links die Ableitungen von 6 skalaren Funktionen (...) auf. Auf den rechten Seiten stehen lineare Kombinationen dieser Funktionen mit variablen Koeffizienten. Es handelt sich also um ein lineares System für $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^6$, wobei $\eta_1 = t \cdot n, \dots, \eta_6 = b \cdot b$. Der Anfangswert ist $\eta(s_0) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Da das System

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \kappa\rho_5 - \kappa\rho_4 - \tau\rho_2, \\ \rho'_2 &= \kappa\rho_3 + \tau\rho_2, \\ \rho'_3 &= -\kappa\rho_2 - \tau\rho_6 + \tau\rho_5, \\ \rho'_4 &= 2\kappa\rho_1, \\ \rho'_5 &= -2\kappa\rho_1 - 2\tau\rho_3, \\ \rho'_6 &= 2\tau\rho_3 \end{aligned}$$

aber auch von $\rho \equiv (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ gelöst wird, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung zum Anfangswert $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$:

$$t \cdot n = t \cdot b = n \cdot b = 0, |t| = |n| = |b| = 1.$$

$(t(s), n(s), b(s))$ bleibt dann auch für alle Zeiten positiv orientiert, denn $\det(t_0, n_0, b_0) = 1$. Da $s \mapsto \det(t(s), n(s), b(s))$ stetig ist und nur die Werte ± 1 , haben kann, folgt aber notwendig $\det(t(s), n(s), b(s)) = 1 \forall s \in I$.

Nun definieren wir die Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(s) := \int_{s_0}^s t(\tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Offenbar ist $|\alpha'(s)| = |t(s)| = 1$, so dass α nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir müssen zeigen:

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha (&:= \text{Krümmung von } \alpha) &= \kappa, \\ \tau_\alpha (&:= \text{Torsion von } \alpha) &= \tau.\end{aligned}$$

Dazu greifen wir wieder auf die Differentialgleichungen (2) zurück: Es gilt nach Definition von α

$$\alpha'(s) = t(s) \implies \alpha''(s) = t'(s) \stackrel{(2)_1}{=} \kappa(s)n(s),$$

und per Definition der Krümmung $\kappa_\alpha(s) = |\alpha''(s)|$, also $\kappa_\alpha(s) = |\kappa(s)n(s)| = \kappa(s)$, da nach Voraussetzung $\kappa > 0$ und nach Konstruktion $|n| \equiv 1$. Für die Torsion τ_α gilt die Formel

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{(\alpha'(s) \times \alpha''(s))}{|\alpha'(s) \times \alpha''(s)|^2} \cdot \alpha'''(s),$$

denn unsere Kurve ist ja nach der Bogenlänge parametrisiert. Es ist $\alpha'''(s) = t''(s) = (t')'(s) \stackrel{(2)_1}{=} (\kappa n)' = \kappa' n + \kappa n' \stackrel{(2)_2}{=} \kappa' n - \kappa^2 t - \kappa \tau b$, und Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\tau_\alpha &= -\frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \cdot \alpha''' \\ &\stackrel{(2)_1}{=} -\frac{t \times \kappa n}{|t \times \kappa n|^2} \cdot (\kappa' n - \kappa^2 t - \kappa \tau b) \\ &= \kappa \tau \frac{t \times \kappa n}{|t \times \kappa n|^2} \cdot b = \tau \frac{(t \times n) \cdot b}{|t \times n|^2} = \tau.\end{aligned}$$

Setzt man jetzt $\tilde{\alpha}(s) := \alpha_0 + \alpha(s)$, so ist gezeigt: Die Kurve $\tilde{\alpha}$ ist eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa_{\tilde{\alpha}} = \kappa$, $\tau_{\tilde{\alpha}} = \tau$ und den Anfangsbedingungen

$$(\star) \quad \begin{cases} t_{\tilde{\alpha}}(s_0) = t_0, n_{\tilde{\alpha}}(s_0) = n_0, b_{\tilde{\alpha}}(s_0) = b_0, \\ \tilde{\alpha}(s_0) = \alpha_0, \end{cases}$$

insbesondere haben wir die Existenz von Kurven mit Krümmung $= \kappa$ und Torsion $= \tau$ bewiesen einschließlich der Existenzaussage aus a).

Sei jetzt $\tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\kappa_{\tilde{\beta}} = \kappa$ und $\tau_{\tilde{\beta}} = \tau$ sowie der Anfangsbedingung (\star) . Dann erfüllen $t_{\tilde{\beta}}, n_{\tilde{\beta}}, b_{\tilde{\beta}}$ die Frenet'sche Formeln, d.h. $(t_{\tilde{\beta}}, n_{\tilde{\beta}}, b_{\tilde{\beta}})$ löst (2), und da die Anfangswerte fixiert sind, folgt wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu (2) sofort $t_{\tilde{\beta}} = t_{\tilde{\alpha}}, n_{\tilde{\beta}} = n_{\tilde{\alpha}}, b_{\tilde{\beta}} = b_{\tilde{\alpha}}$.

Gemäß $\frac{d}{ds}\tilde{\beta}(s) = t_{\tilde{\beta}}(s)$ gilt

$$\frac{d}{ds}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}(s)) \equiv 0,$$

was wegen $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha_0 = \tilde{\beta}(s_0)$ dann insgesamt $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ ergibt, womit a) des Theorems ganz bewiesen ist.

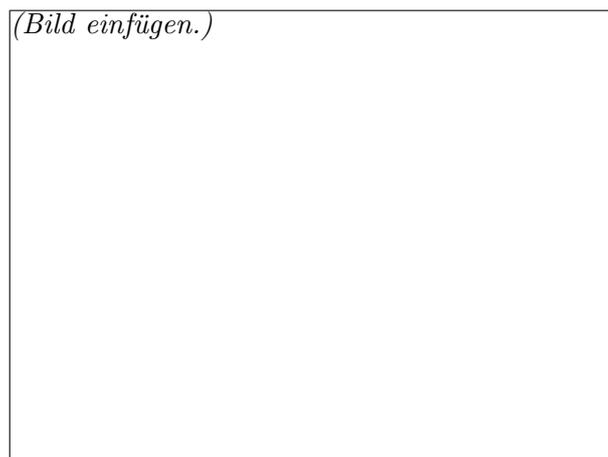
Wir kommen zur Aussage b): Seien $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit Krümmung $= \kappa$ und Torsion $= \tau$. Wir betrachten die orthogonale Transformation $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} t_\beta(s_0) &= S(t_\alpha(s_0)), & n_\beta(s_0) &= S(n_\alpha(s_0)), \\ b_\beta(s_0) &= S(b_\alpha(s_0)). \end{aligned}$$

Die Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma := S(\alpha)$, ist nach der Bogenlänge parametrisiert mit (s.o.) $t_\gamma(s_0) = t_\beta(s_0)$, $n_\gamma(s_0) = n_\beta(s_0)$, $b_\gamma(s_0) = b_\beta(s_0)$, und da $(t_\beta, n_\beta, b_\beta), (t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma)$ (2) erfüllen müssen (Frenet'sche Formeln unter Beachtung von $\kappa_\gamma = \kappa, \tau_\gamma = \tau$), folgt $(t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma) = (t_\beta, n_\beta, b_\beta)$ auf I , speziell $\frac{d}{ds}(\gamma(s) - \beta(s)) = t_\gamma(s) - t_\beta(s) = 0$, mit anderen Worten: $\beta(s) = S(\alpha(s)) + c$, $s \in I$, für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$. \square

§ 3 Globale Eigenschaften ebener Kurven

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Kurven mit Spur in \mathbb{R}^2 , die wie immer nach der Bogenlänge parametrisiert sein sollen. Wir legen hier den Begriff der **orientierten** Krümmung zugrunde (Symbol κ), die wie folgt definiert ist (vgl. § 2): Es sei



$n(s) :=$ der 1-Vektor senkrecht zu $t(s)$, so dass $(t(s), n(s))$ gleich orientiert zu (e_1, e_2) ist (Hauptnormalenvektor).

Wegen $0 = \frac{d}{dx}(t \cdot t)$ ist $t' \perp t$, d.h. es gilt mit $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$t'(s) = \kappa(s)n(s).$$

DEFINITION:

- Eine (reguläre) Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt **geschlossen**, wenn gilt $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
- Die geschlossene Kurve heißt **einfach geschlossen**, wenn $\alpha|_{[a,b]}$ injektiv ist.

Bemerkungen:

- 1.) Da wir mit C^∞ -Kurven arbeiten, ist a) die in diesen Kontext passende Version von Geschlossenheit und nicht wie bei nur stetigen Kurven die Bedingung $\alpha(a) = \alpha(b)$. Beschränkt man sich auf C^m -Kurven, so hätte man entsprechend zu fordern $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b) \forall k \leq m$.
- 2.) Die Kreislinie $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist z.B. geschlossen und auch einfach geschlossen.
- 3.) Man überlegt sich leicht $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist geschlossen genau dann, wenn es eine (reguläre) Kurve $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $\tilde{\alpha}|_{[a,b]} = \alpha$ und $\tilde{\alpha}(t + (b - a)) = \tilde{\alpha}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\tilde{\alpha}$ ist periodisch mit Periode $b - a$.

Wir beginnen mit einigen einfachen Aussagen globaler Natur

SATZ:

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

- a) Ist $\kappa_\alpha \equiv 0$, so ist Spur α in einer Geraden enthalten.
- b) Ist die orientierte Krümmung κ_α konstant $\neq 0$, so gilt Spur $\alpha \subset$ Kreislinie.

Der Beweis von a) ist trivial, da dann $t'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s)n_\alpha(s) = 0$, also $\alpha''(s) \equiv 0$, d.h. α ist affin linear. Für b) holen wir etwas weiter aus: Sei $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die orthogonale Abbildung

“Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn”.

Dann gilt nach Wahl von $n_\alpha(s)$: $n_\alpha(s) = D(t_\alpha(s))$, also:

$$\begin{aligned} n'_\alpha(s) &= D(t'_\alpha(s)) = D(\kappa_\alpha(s)n_\alpha(s)) \\ &= \kappa_\alpha(s)D(n_\alpha(s)) = \kappa_\alpha(s)(D \circ D)(t_\alpha(s)) \\ &= -\kappa_\alpha(s)t_\alpha(s). \end{aligned}$$

Also bekommen wir folgende Version der

Frenet'schen Formeln für ebene Kurven:

$$t'_\alpha = \kappa_\alpha n_\alpha, \quad n'_\alpha = -\kappa_\alpha t_\alpha$$

Es handelt sich um ein lineares System für (t_α, n_α) mit stetigen Koeffizienten, und wie in §2 kann man zeigen: Ist eine Funktion $\kappa(s) \neq 0$ gegeben, so findet man zu jeder Vorgabe von $\alpha_0 \in \mathbb{R}^2$, (t_0, n_0) positiv orientierte ONB auf \mathbb{R}^2 , genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha(s_0) = \alpha_0, \quad \kappa_\alpha = \kappa, \quad t_\alpha(s_0) = t_0, \quad n_\alpha(s_0) = n_0.$$

Nun zum Beweis von b) des Satzes: Ist κ_α konstant $\neq 0$, so ist nach obigem Gleichungssystem

$$\frac{d}{ds} \left(\alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha} n_\alpha(s) \right) = t_\alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha} n'_\alpha(s) \equiv 0,$$

also

$$\alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha} n_\alpha(s) \equiv \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Das bedeutet

$$|\alpha(s) - \xi| \equiv \frac{1}{|\kappa_\alpha|},$$

alle Punkte $\alpha(s)$ liegen auf der Kreislinie um ξ mit Radius $1/|\kappa_\alpha|$. \square

Eine weitere, einfache globale Aussage ist

SATZ:

Sei α eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$\max |\kappa_\alpha| \geq 1/\text{diam}(\text{Spur } \alpha).$$

Hierbei ist $\text{diam}(\text{Spur } \alpha) = \max_{s_1, s_2 \in [a, b]} |\alpha(s_1) - \alpha(s_2)|$ der Durchmesser der Menge $\text{Spur } \alpha$, wobei wir annehmen, dass $[a, b]$ das Parameterintervall ist.

Beweis:

Da die Spur von $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ kompakt ist, können wir $\text{Spur } \alpha$ in eine abgeschlossene Kreisscheibe $D := \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_0| \leq R\}$ legen. Wählen wir hier R minimal, so berührt $\text{Spur } \alpha$ den Rand ∂D in mindestens einem Punkt p (sonst könnte man R verkleinern).

Nach geeigneter Drehung und Verschiebung können wir p auf die obere y -Achse bringen, so dass α lokal bei p als Graph einer Funktion $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden kann, $p = (0, f(0))$.

Für ∂D haben wir dann die Darstellung als Graph von $g(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$. Für die weitere Rechnung beachte man

- a) f ist in 0 maximal, also $f'(0) = 0$; (entsprechend für g)
- b) 0 ist Minimum von $g - f$ und $g - f \geq 0$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Die Formel für die orientierte Krümmung im Graphenfall ergibt sodann: ($p = \alpha(s_0)$)

$$\begin{aligned}
 |\kappa_\alpha(s_0)| &= |f''(0)|/\sqrt{1+|f'(0)|^2}^3 = |f''(0)| = -f''(0) \\
 &= \underbrace{g''(0) - f''(0)}_{\geq 0} - g''(0) \geq -g''(0) \\
 &\stackrel{g \text{ max. in } 0}{=} |g''(0)| = |g''(0)|/\sqrt{1+|g'(0)|^2}^3 \\
 &= |\kappa_{\text{Kreis}}| = 1/R.
 \end{aligned}$$

Also ist $\max |\kappa_\alpha| \geq 1/R$, und wegen $\text{diam}(\text{Spur } \alpha) \geq R$ (sonst passt Spur α in einen Kreis mit Rad. $< R$) folgt die Behauptung. \square

Als nächstes wollen wir den **Rotationsindex** für geschlossene Kurven $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieren, wobei wir wie **immer Parametrisierung nach der Bogenlänge annehmen**. (Dann ist natürlich $L = \text{Länge Spur } \alpha!$)

Sei ab jetzt $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossene Kurve mit Tangentialabbildung $t = \alpha' : [0, L] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Mit α ist auch t eine geschlossene Kurve mit Spur in der Kreislinie S^1 . Man stellt sich anschaulich vor: Wird Spur α durchlaufen, so durchläuft t den Einheitskreis einfach oder mehrfach, und diese Zahl der Durchläufe (mit Vorzeichen versehen) nennt man den Rotationsindex von α .

sei $\tilde{\theta}(s) \in [0, 2\pi)$ der eindeutig bestimmte Winkel zwischen dem Tangentenvektor $t(s)$ und der **positiven** x -Achse gemessen **gegen den Uhrzeigersinn**: ($\tilde{\theta}(s)$ ist der orientierte Winkel, der angibt, wie weit man die positive x -Achse gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, damit man $t(s)$ bekommt).

Die Funktion $\tilde{\theta}$ ist i.a. unstetig, denn ist $\tilde{\theta}(s_0) = 0$ und dreht sich t gegen den Uhrzeigersinn, so hat man für $s > s_0$ nahe s_0 sehr kleine $\tilde{\theta}$ -Werte, wogegen für $s = s_0 - \varepsilon$ nahezu der Wert 2π vorliegt.

Das unangenehme Verhalten von $\tilde{\theta}$ wird "beseitigt" durch

Lemma:

Es gibt eine **stetige** Funktion $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(\star) \quad \boxed{\theta(s) \equiv \tilde{\theta}(s) \pmod{2\pi}.}$$

Die Funktion $\theta(s)$ erfüllt gemäß (\star) also die Beziehung $\frac{1}{2\pi}[\theta(s) - \tilde{\theta}(s)] \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

Die Tangentenabbildung $t : [0, L] \rightarrow S^1$ ist auf dem kompakten Intervall $[0, L]$ gleichmäßig stetig, zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher $\delta > 0$ mit

$$|s_1 - s_2| < \delta \implies |t(s_1) - t(s_2)| < \varepsilon.$$

Speziell kann man für $\varepsilon > 0$ klein genug erreichen, dass $t(s_1), t(s_2)$ im Fall $|s_1 - s_2| < \delta$ in einer offenen Halbebene liegen. Man zerlegt $[0, L]$ in der Form

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_\ell = L$$

mit Teilpunkten s_j , für die $s_j - s_{j-1} < \delta$ gilt. Wir definieren θ **stetig und mit** (\star) zunächst auf $[s_0, s_1]$, danach wiederholt man diesen Prozess induktiv und hat die Aussage des Lemmas.

Fall 1: $\tilde{\theta}(s_0) = 0$ ($\Rightarrow t(s_0) = (1, 0)$) (kritische Lage!)

Dann sei für $s \in [s_0, s_1]$

$$\theta(s) := \begin{cases} \tilde{\theta}(s), & \text{falls } y\text{-Koordinate von } t(s) \geq 0 \\ \tilde{\theta}(s) - 2\pi, & \text{falls } y\text{-Koordinate von } t(s) < 0 \end{cases}$$

Fall 2: $\tilde{\theta}(s_0) \in (0, 2\pi)$

Für ε passend ist dann $\tilde{\theta}(s) > 0$ auf $[s_0, s_1]$ und man kann $\theta := \tilde{\theta}$ auf $[s_0, s_1]$ definieren.

Nun argumentiere man entsprechend auf $[s_1, s_2]$ usw. \square

Insbesondere ist (wegen $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(L)$!)

$$I := \frac{1}{2\pi}[\theta(L) - \theta(0)] \in \mathbb{Z}.$$

Es handelt sich bei dieser ganzen Zahl um eine **Invariante**, die nicht von der speziellen Hilfsfunktion θ des Lemmas abhängt: Ist θ^* eine zweite Funktion (also stetig und mit (\star)), so gilt

$$\theta^*(s) - \theta(s) = \theta^*(s) - \tilde{\theta}(s) - (\theta(s) - \tilde{\theta}(s)) = 2\pi(n^*(s) + n(s)) =: 2\pi m(s)$$

mit Funktion $n, n^* : [0, L] \rightarrow \mathbb{Z}$. Die Funktion $\theta^* - \theta$ ist stetig, das geht aber nur, wenn $m(s) \equiv m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ist. Es folgt: $\theta^* = \theta + 2\pi m$, also $\theta^*(L) - \theta^*(0) = \theta(L) - \theta(0)$. Das rechtfertigt

DEFINITION:

Es sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Ist θ wie im Lemma, so heißt

$$I_\alpha := \frac{1}{2\pi}[\theta(L) - \theta(0)] \in \mathbb{Z}$$

der **Rotationsindex der Kurve** α .

Zum Beweis der Existenz der Funktion θ wurde lediglich benutzt, dass die Tangentenabbildung $t(s)$ stetig ist mit $t(0) = t(L)$.

Wegen (\star) aus dem Lemma und gemäß der Definition von $\tilde{\theta}(s)$ gilt

$$\begin{aligned} t(s) &= (\cos \theta(s), \cos \theta(s)) \\ n(s) &= (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \end{aligned}$$

also $t'(s) = \theta'(s)n(s)$, d.h. nach Definition der Krümmung $\kappa(s) = \theta'(s)$.

Wir erhalten daraus die **Integraldarstellung des Rotationsindex von α**

$$2\pi I_\alpha = \theta(L) - \theta(0) = \int_0^L \kappa(s) ds.$$

Hier steht, dass $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds$ eine ganze Zahl ist, was a priori nicht klar ist. Viele Autoren benutzen die Gleichung auch zur Definition von I_α . Als Anwendung der Begriffsbildung beweisen wir den berühmten

THEOREM: (“Umlaufsatz”)

Sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, **einfach** geschlossene Kurve (d.h. $\alpha|_{[0, L)}$ ist injektiv). Dann gilt:

$$\text{Rotationsindex } I_\alpha \in \{+1, -1\}.$$

Beweis (nach Heinz Hopf, 1935):

Anschaulich ist klar, dass es einen Punkt $p \in \text{Spur } \alpha$ gibt, so dass Spur α ganz auf einer Seite der Tangente in p liegt. Dazu nehme man eine Gerade, die Spur α nicht trifft (existiert, da Spur α kompakt) und verschiebe diese solange parallel bis sie zu einer Tangente wird.

O.E. kann man annehmen, dass $p = \alpha(0) = \alpha(L)$ ist, sonst parametrisiere man um, was den Index nicht ändert.

Auf dem Dreieck $\Delta_L := \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq u \leq L\}$ betrachtet man die **Sehnenabbildung**

$$\sigma(s, u) := \begin{cases} \frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} & , s < u, u - s < L \\ \alpha'(s) & , s = 0 \\ -\alpha'(0) & , s = 0, u = L \end{cases}$$

Da α einfach geschlossen ist, ist $\sigma(s, u)$ wohldefiniert, denn in der ersten Definitionszeile ist $s = 0, u = L (\Rightarrow \alpha(u) = \alpha(s))$ “verboten”, nur für diese Wahl ist $\alpha(u) = \alpha(s)$.

Außerdem ist σ stetig: Dazu ist zu prüfen:

1.) Ist $0 \leq s_0 \leq L$, so gilt

$$\lim_{(s, u) \rightarrow (s_0, s_0), u > s} \frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} = \alpha'(s_0)$$

und

2.)

$$\lim_{(s,u) \rightarrow (0,L), u > s} \frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} = -\alpha'(0)$$

ad 1.) Für $s < u$, $u - s < L$ ist

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} = \frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{u - s} \cdot \left| \frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{u - s} \right|^{-1},$$

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{u - s} = \frac{1}{u - s} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \alpha(s + \rho(u - s)) d\rho = \int_0^1 \alpha'(s + \rho(u - s)) d\rho \longrightarrow \alpha'(s_0),$$

falls $(s, u) \longrightarrow (s_0, s_0)$, $s_0 \geq 0$, $u > s$. Also:

$$\lim_{(s,u) \rightarrow (s_0, s_0), u > s} \frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} = \frac{\alpha'(s_0)}{|\alpha'(s_0)|} = \alpha'(s_0)$$

wegen $|\alpha'(s_0)| = 1$.

ad 2.) Seien $s < u$, $u - s < L$. Es gilt $\alpha(s) = \alpha(s + L)$ (α L -periodisch fortgesetzt), also

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} = \frac{\alpha(u) - \alpha(s + L)}{u - (s + L)} \frac{u - (s - L)}{|\alpha(u) - \alpha(s + L)|}$$

mit $(\alpha(u) - \alpha(s + L)) / (u - (s - L)) \rightarrow \alpha'(L)$ bei $u \rightarrow L$, $s \rightarrow 0$, $u > s$. (s.o.)

Gemäß $u - (s + L) < 0$ gilt dann bei diesem Grenzübergang

$$u - (s + L) / |\alpha(u) - \alpha(s + L)| \rightarrow -1 / |\alpha'(L)|,$$

was wegen $|\alpha'| = 1$ und $\alpha'(0) = \alpha'(L)$ die Aussage 2.) ergibt.

Die weitere Vorgehensweise zur Berechnung von I_α sieht so aus:

- I_α wird vom Tangentialfeld t_α bestimmt und wie nach der Definition des Rotationsindex vermerkt, können wir für jede stetige Kurve $T : [0, L] \rightarrow S^1$ eine Zahl $I_T \in \mathbb{Z}$ definieren sofern $T(0) = T(L)$ ist. (Man mache einfach die Konstruktion nach!) Speziell ist $I_\alpha = I_{t_\alpha}$.
- Ist $T_\rho : [0, L] \rightarrow S^1$, $0 \leq \rho \leq 1$, eine Familie geschlossener Kurven, die stetig von ρ abhängt, so ist $\rho \mapsto I_{T_\rho}$ stetig, also $\equiv \text{const } t$, da \mathbb{Z} -wertig.
- Man suche eine Schar T_ρ , so dass $T_0 = t (= t_\alpha)$ ist, und gleichzeitig T_1 eine **so einfache Gestalt** hat, dass man I_{T_1} **ausrechnen kann**.

Um diese Schritte auszuführen, sei

$$\varphi_u(s) := \begin{cases} L \cdot ((1 - u)s, (1 + u)s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ L \cdot ((1 + u)s - u, (1 - u)s + u), & 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

wobei $0 \leq u \leq 1$ als fixierter Parameter gedacht wird. Es gilt: φ_u hat Werte in Δ_L für jedes $u \in [0, 1]$, φ_u passt bei $\frac{1}{2}$ stetig zusammen und auch $(s, u) \mapsto \varphi_u(s)$ ist eine stetige Abbildung $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Delta_L$, speziell ist

$$\varphi_0(s) = L(s, s)$$

Alle Spuren starten in $(0, 0)$ und laufen wie angedeutet nach (L, L) , die Spur von φ_0 ist die Diagonale. Es sei schließlich

$$T_u := \sigma \circ \varphi_u : [0, 1] \rightarrow S^1, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Man hat Stetigkeit von σ , also Stetigkeit von jeder einzelnen Kurve T_u , offensichtlich ist auch $(s, u) \mapsto T_u(s) = \sigma(\varphi_u(s))$ stetig wegen der Stetigkeit von $(s, u) \mapsto \varphi_u(s)$. Daher und mit den Vorbemerkungen ist

$$\text{Rotationsindex } I_{T_u} \text{ der Kurve } T_u \equiv \text{konst} \in \mathbb{Z}.$$

(beachte: $T_u(0) = T_u(1) = \alpha'(0)$, T_u erfüllt also die Erfordernisse zur Definition des Index!)

Außerdem: $T_0(s) = \sigma(\varphi_0(s)) = \sigma(L(s, s)) = \alpha'(Ls)$, m.a.W.: $I_{T_0} = I_{\alpha}$, so dass obige Zahl "konst $\in \mathbb{Z}$ " gerade I_{α} ist. Insbesondere folgt:

$$I_{\alpha} = I_{T_1},$$

und den Index von T_1 können wir in einem letzten Schritt ausrechnen:

Es ist $T_1 = \sigma \circ \varphi_1 : [0, 1] \rightarrow S^1$.

Durchläuft s das Intervall $[0, 1/2]$, so durchläuft $\sigma(\varphi_1(s)) = \sigma(0, 2Ls) = \frac{\alpha(2Ls) - \alpha(0)}{|\alpha(2Ls) - \alpha(0)|}$ die normierten Sehnen vom Punkt $\alpha(0)$ aus, wobei $\sigma(\varphi_1(0)) = \alpha'(0)$, $\sigma(\varphi_1(\frac{1}{2})) = -\alpha'(0)$, wobei $\sigma(\varphi_1(s))$ stets auf derselben Hälfte von S^1 bleibt, da Spur α ja auf einer Seite der Tangente in α in $\alpha(0)$ bleibt. Die Änderung des Winkels ist also π oder $-\pi$.

Für s zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 variiert

$$\sigma(\varphi_1(s)) = \sigma(2Ls - L, L) = \frac{\alpha(L) - \alpha(2Ls - L)}{|\alpha(L) - \alpha(2Ls - L)|} = \frac{\alpha(0) - \alpha(2Ls - L)}{|\alpha(0) - \alpha(2Ls - L)|}$$

offensichtlich genau in der anderen Hälfte von S^1 , die Winkeländerung (von $-\alpha'(0) = \sigma(\varphi_1(1/2))$ auf $\alpha'(0) = \sigma(\varphi_1(1))$) ist wieder $+\pi$ oder $-\pi$ (in beiden Fällen gleiches Vorzeichen), insgesamt folgt 2π oder -2π also Winkeländerung, so dass $I_{\alpha} = \pm 1$.

□

Korollar:

Es sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine **einfach** geschlossene, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. κ_α bezeichne die orientierte Krümmung. Dann gilt:

- $\int_0^L \kappa_\alpha ds = \pm 2\pi$. (Die Größe $\int_0^L \kappa_\alpha ds$ wird auch Totalkrümmung von α genannt. Für einfach geschlossene Kurven ist diese also $\pm 2\pi$.)
- Ist $|\kappa_\alpha| \geq \frac{1}{r}$ für ein $r > 0$, so ist $L = L(\alpha)$ (= Länge von α) $\leq 2\pi r$.
- Aus $|\kappa_\alpha| \leq \frac{1}{r}$ folgt $L(\alpha) \geq 2\pi r$.
- Es ist $\max |\kappa_\alpha| \geq 2\pi/L$.

Beweis:

a) Für geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven wurde gezeigt

$$2\pi I_\alpha = \int_0^L \kappa_\alpha(s) ds,$$

so dass die Behauptung für einfach geschlossene Kurven aus $I_\alpha = \pm 1$ folgt.

c) Es ist mit a) $2\pi = \left| \int_0^L \kappa_\alpha ds \right| \leq \int_0^L |\kappa_\alpha| ds \leq \frac{L}{r}$ also $L \geq 2\pi r$.

b) Die Voraussetzung $|\kappa_\alpha| \geq 1/r$ liefert speziell, dass κ_α keinen Vorzeichenwechsel hat. Also gilt wieder mit a): $2\pi = \left| \int_0^L \kappa_\alpha ds \right| = \int_0^L |\kappa_\alpha| ds \geq L/r$, d.h. $L \leq 2\pi r$.

d) Wäre $\max |\kappa_\alpha| \leq (1 - \varepsilon)2\pi/L$ für ein $\varepsilon > 0$, so ergibt c):

$$L \geq 2\pi \frac{1}{(1 - \varepsilon)2\pi} L > L,$$

was unmöglich ist. □

Konvexe Kurven

Eine **konvexe Kurve** in der Ebene wird anschaulich dadurch beschrieben, dass für jedes $s_0 \in I$ die Spur ganz auf der einen Seite der Tangente durch den Kurvenpunkt $\alpha(s_0)$ liegt.

DEFINITION

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve. α heißt konvex, falls gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) &\geq 0 \quad \forall s \in I, s_0 \in I \quad \text{oder} \\ (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) &\leq 0 \quad \forall s \in I, s_0 \in I \end{aligned}$$

Hierbei ist $n_\alpha(s_0)$ der Normalenvektor zu α in s_0 .

Übung:

Man überlege, dass obige Ungleichungen genau bedeuten, dass Spur α überall ganz

auf einer Seite der Tangente liegt!

Konvexe Kurven lassen sich durch das Vorzeichen der Krümmung beschreiben - **es darf keinen Vorzeichenwechsel geben** (vgl. dies mit $f'' \geq 0$ für reelle Funktionen!).

THEOREM (Charakterisierung konvexer Kurven)

Sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte **einfach** geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\alpha \text{ konvex} \iff \begin{cases} \kappa_\alpha(s) \geq 0 & \forall 0 \leq s \leq L \\ \text{oder} \\ \kappa_\alpha(s) \leq 0 & \forall 0 \leq s \leq L. \end{cases}$$

Bemerkung:

Eine einfach geschlossene, konvexe Kurve zerlegt anschaulich den \mathbb{R}^2 in genau zwei Teile, nämlich die konvexe, **beschränkte** Teilmenge des \mathbb{R}^2 , die von Spur α umschlossen wird, und den dazu disjunkten unbeschränkten Rest. Allgemeiner (ohne Krümmungsvoraussetzung und daher viel schwerer zu beweisen) gilt der folgende **topologische Satz**

Jordan'scher Kurvensatz:

Sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lediglich **stetige, einfach geschlossene** Kurve. Dann hat $\mathbb{R}^2 - \text{Spur } \alpha$ genau 2 Zusammenhangskomponenten, eine ist beschränkt ("Innengebiet"), die andere unbeschränkt ("Außengebiet").

Beweis des Theorems:

- 1.) Es sei zunächst α konvex im Sinne der Definition. Dann gilt etwa in $s_0 \in [0, L]$ $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \geq 0 \forall s \in [0, L]$. Gleichzeitig hat man die Taylorentwicklung bei s_0 .

$\alpha(s) - \alpha(s_0) = (s - s_0)t_\alpha(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa_\alpha(s_0)n_\alpha(s_0) + \text{Restglied}$, wobei das Restglied $R(s, s_0)$ die Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^{-2}R(s, s_0) = 0$$

gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (s - s_0)^{-2}(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \\ &= (s - s_0)^{-1} \underbrace{t_\alpha(s_0) \cdot n_\alpha(s_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\kappa_\alpha(s_0) \underbrace{n_\alpha(s_0) \cdot n_\alpha(s_0)}_{=1} \\ &\quad + (s - s_0)^{-2}R(s, s_0) \cdot n_\alpha(s_0) \end{aligned}$$

und nach Grenzübergang $s \rightarrow s_0 : \frac{1}{2}\kappa_\alpha(s_0) \geq 0$.

2.) Sei o.E. $\kappa_\alpha \geq 0$ auf $[0, L]$.

Annahme: α ist **nicht** konvex... □

DEFINITION

Sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Ein **Scheitel** (“**vertex**”) von α ist eine **lokale Extremstelle** $s_0 \in [0, L]$ der orientierten Krümmung.

Interessant ist diese Begriffsbildung für geschlossene Kurven:

Kreis: jeder Punkt ist Scheitel

Ellipse: es gibt genau vier Scheitel

(bezogen auf reguläre Parametrisierungen!)

Ein berühmter Satz sagt, dass es für konvexe Kurven mindestens 4 Scheitel geben muss.

THEOREM (Vierscheitel-Satz)

Sei $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ einfach geschlossen, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. **Ist α konvex, so gibt es mindestens vier Scheitel.**

Beweis (nach Herglotz, 1913):

1.) Als stetige Funktion $[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Kompaktum $[0, L]$ nimmt κ_α seine absoluten Extremwerte an **mindestens zwei Stellen** an. (Das ist klar, falls $\min \kappa_\alpha < \max \kappa_\alpha$. Gilt “=”, so ist jede Stelle Extremum, und man ist fertig. Man kann daher nachfolgend “<” annehmen!) Es gibt also mindestens 2 Scheitel, s_{\max} und s_{\min} . Nach Drehung und Verschiebung kann man erreichen, dass die x -Achse durch $\alpha(s_{\min})$ und $\alpha(s_{\max})$ geht.

2.) Man überlegt sich: Die x -Achse hat keinen weiteren Punkt zwischen χ_1 und χ_2 mit Spur α gemeinsam. Nehmen wir an, dass es doch einen dritten gemeinsamen Punkt χ gibt.

Ist die Tangente in χ gleich der x -Achse, so verläuft wegen der Konvexität von α ein Teil der Spur von α in dieser Geraden, was $\kappa(s_{\min}) = \kappa(s_{\max}) = 0$ ergibt, Widerspruch. Also schneidet die Tangente in χ die x -Achse genau in χ , dann liegen aber $\alpha(s_{\min})$ und $\alpha(s_{\max})$ auf verschiedenen Seiten der Tangente, was auch der Konvexität widerspricht.

3.) Also schneidet α die x -Achse nur in χ_1 und χ_2 .

O.E. seien $\kappa_\alpha(0) = \min \kappa_\alpha$, $\kappa_\alpha(s^*) = \max \kappa_\alpha$, also $0 = s_{\min}$, $s^* = s_{\max} \in (0, L)$.

Hätte α nur diese beiden Scheitel, so wäre

$$\kappa'_\alpha \geq 0 \quad \text{auf } [0, s^*]$$

und

$$\kappa'_\alpha \leq 0 \quad \text{auf } [s^*, L]$$

(andernfalls hätte κ_α weitere lokale Extrema!). Schreibt man $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, so folgt

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \kappa'_\alpha(s)y(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, L] \\ \text{oder} \\ \kappa'_\alpha(s)y(s) \leq 0 \quad \forall s \in [0, L], \end{array} \right.$$

denn es ist nach Konstruktion

$$y(s) \geq 0 \text{ auf } [0, s^*] \text{ und } y \leq 0 \text{ auf } [s^*, L]$$

oder umgekehrt.

Mit $t_\alpha(s) = (x'(s), y'(s))$, $n_\alpha(s) = (-y'(s), x'(s))$ und $t'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s)n_\alpha(s)$ folgt (1^{te} Komponente der letzten Gleichung)

$$(**) \quad x''(s) = \kappa_\alpha(s)(-y'(s)).$$

Nehmen wir an, dass die 1^{te} Zeile von (*) zutrifft. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^L \kappa'_\alpha(s)y(s) \, ds = - \int_0^L \kappa_\alpha(s)y'(s) \, ds \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_0^L x''(s) \, ds = x'(L) - x'(0) = 0 \end{aligned}$$

wegen $\alpha'(0) = \alpha'(L)$. Dabei haben wir partiell integriert. Wegen der Geschlossenheit von α gibt es keine Randterme. Es folgt wegen (*) $\kappa'_\alpha y \equiv 0$ auf $[0, L]$, also $\kappa'_\alpha = 0$. Dann ist $\kappa_\alpha \equiv \text{const}$, α ein Kreis, was unserer Annahme (nur 2 Scheitel existieren) widerspricht. Also gibt es mindestens 3 Scheitel. Dann findet man aber auch 4, da sich Max.- und Min.-stellen abwechseln. \square

Zum Abschluss diskutieren wir die wohl berühmteste Aussage:

THEOREM (Isoperimetrische Ungleichung)

Es sei C eine einfach geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 mit Länge L . A sei der Flächeninhalt des von C eingeschlossenen Gebiets. Dann gilt

$$4\pi A \leq L^2$$

mit “=” genau dann, wenn C ein **Kreis** ist.

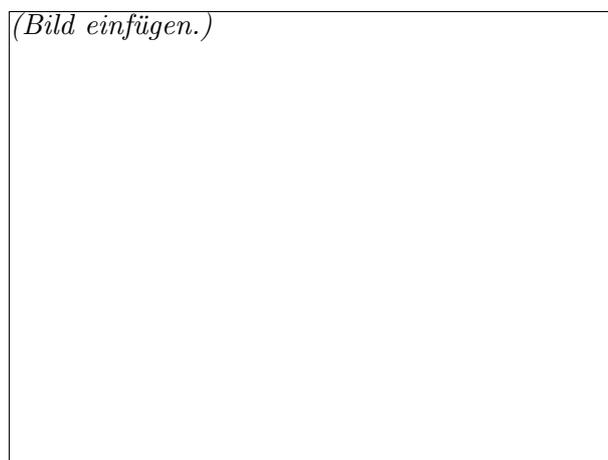
Bemerkung:

- 1.) Denkt man sich die Länge L als fest vorgegeben, so ist also für Kurven C mit Länge $= L$ die Fläche A kleiner als $L^2/4\pi$ außer wenn C ein Kreis ist, da dann “=” eintritt. Mit anderen Worten: bei gegebener Länge maximieren genau die Kreise den eingeschlossenen Inhalt.

- 2.) Ohne den Jordanschen Kurvensatz ist unklar, was mit dem “von der Kurve umschlossenen Gebiet” gemeint ist.

Beweis (nach Erhard Schmidt 1939):

- 1.) Wir leiten zunächst eine Formel für den Flächeninhalt A ab. G sei das “Innengebiet”, das von der Spur der einfach geschlossenen Kurve $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ berandet wird. (Wir nehmen α als nach der Bogenlänge parametrisiert an!) O.E. sei α positiv orientiert, d.h. $n_\alpha(s)$ ist **innere** Normale (zeigt in G hinein) an ∂G .



Das äußere Normalenfeld $\nu : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist per Definition

$$\nu(\xi) = -n_\alpha(s), \quad \xi = \alpha(s),$$

und es gilt der Satz von Gauß

$$(1) \quad \int_G \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_{\partial G} \nu \cdot F \, d\mathcal{H}^1$$

für Vektorfelder $F : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Hierbei ist rechts mit $d\mathcal{H}^1$ die Integration bzgl. des Hausdorff-Maßes gemeint bzw. mit Rückgriff auf die Parametrisierung α ist

$$\int_{\partial G} = \int_0^L \nu(\alpha(s)) \cdot F(\alpha(s)) \underbrace{|\alpha'(s)|}_{=1} \, ds$$

Schreibt man $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, so ist $\nu(\alpha(s)) = -n_\alpha(s) = (y'(s), -x'(s))$, also

$$(2) \quad \int_{\partial G} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 = \int_0^L (F^1(x(s), y(s))y'(s) - F^2(x(s), y(s))x'(s)) \, ds.$$

Man wählt in (1)

$$F(x, y) = (x, 0) \text{ bzw. } (0, y) \text{ bzw. } \frac{1}{2}(x, y).$$

Für alle drei Fälle ist $\operatorname{div} F \equiv 1$, also

$$A = \int_G \operatorname{div} F \, dx \, dy ,$$

mit (2) berechnet man die Integrale über ∂G und bekommt

Kapitel 2

Flächentheorie

§ 1 Beschreibung parametrisierter Flächen - Grundbegriffe

Die Theorie differenzierbarer Kurven fasst die Kurven als Abbildungen $\alpha : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^2$ oder \mathbb{R}^3 auf. Wir übertragen diesen Standpunkt sinngemäß auf Flächen und betrachten zunächst global parametrisierte Flächen. Später erweitern wir diese Vorstellung und definieren Flächen als Punktmengen in \mathbb{R}^3 , die lokal parametrisiert werden können.

DEFINITION (parametrisierte Flächen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen.

- a) Eine (beliebig oft) differenzierbare Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **parametrisiertes Flächenstück** bzw. **Fläche**, falls gilt:
 - 1.) Für alle $(u, v) \in \Omega$ hat die Ableitung $DX(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ maximalen Rang (= 2).
 - 2.) X ist injektiv und $X^{-1} : X(\Omega) \rightarrow \Omega$ ist stetig.
- b) Der Untervektorraum $DX(u, v)(\mathbb{R}^2)$ heißt in diesem Fall **Tangentialebene** an X in (u, v) seine Elemente heißen **Tangentenvektoren** an X in (u, v) .

Bemerkungen:

- 1.) $DX(u, v)$ wird repräsentiert durch die Matrix $(X_u X_v)(u, v)$ mit den Vektoren $X_u := \frac{\partial}{\partial u} X$ und $X_v := \frac{\partial}{\partial v} X$. Die Rangbedingung besagt, daß diese an jeder (u, v) des Parametergebiets Ω linear unabhängig sind. Man schreibt

$$T_{(u,v)}X$$

für die Tangentialebene und hat die Darstellung

$$T_{(u,v)}X = \{\lambda X_u(u, v) + \mu X_v(u, v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} .$$

2.) Sei (u_0, v_0) fixiert in Ω , $\xi := X(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$. Man setzt

$$\tilde{T}_{(u_0, v_0)}X := \{\alpha'(0) : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Kurve mit Spur } \alpha \subset X(\Omega), \alpha(0) = \xi\},$$

d.h. man betrachtet die Tangentenvektoren an Kurven mit Spur in $X(\Omega)$ durch ξ . Sei $\beta_i(t) := (u_0, v_0) + te_i, i = 1, 2$. Dann ist $\alpha_i(t) := X(\beta_i(t))$ eine solche Kurve mit $\alpha_i'(0) = \partial_i X(u_0, v_0)$, so dass $X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)$ zu $\tilde{T}_{(u_0, v_0)}X$ gehören. Genauso sieht man $(\beta(t) := (u_0, v_0) + t\lambda e_1 + t\mu e_2)$, dass $\lambda X_u(u_0, v_0) + \mu X_v(u_0, v_0) \in \tilde{T}_{(u_0, v_0)}X$ ist. Es folgt $TX \subset \tilde{T}X$. Sei umgekehrt $\alpha'(0) \in \tilde{T}_{(u_0, v_0)}X$. Man setzt $\beta := X^{-1}(\alpha)$. Dann ist $\beta'(0) = \lambda e_1 + \mu e_2$, und aus $\alpha = X \circ \beta$ folgt $\alpha'(0) = DX(u_0, v_0)(\beta'(0)) = \lambda X_u(u_0, v_0) + \mu X_v(u_0, v_0)$, womit $\alpha'(0) \in T_{(u_0, v_0)}X$ bewiesen ist. Insgesamt ist gezeigt: $T_{(u_0, v_0)}X = \tilde{T}_{(u_0, v_0)}X$.

3.) Der Satz über die inverse Abbildung liefert bei entsprechender Anwendung [vgl. Do Carmo, Prop.2, p.79], daß $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ alleine mit a)1.) zumindest **lokal** injektiv ist und **lokal** eine stetige Inverse hat. Das bedeutet nicht die globale Injektivität von X , die Fläche kann Selbstdurchschneidungen haben, was wir mit a.)2.) ausschließen.

Beispiel:

1.) (**parametrisierte Ebene**) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ und $X : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto C + uA + vB$. Dann ist $DX(u, v) = (AB)$, also: $\text{Rg } DX(u, v) = \text{Rg } (AB)$, und der Rang ist maximal genau dann, wenn A und B linear unabhängig sind. Nehmen wir dies an, so ist X natürlich injektiv, also eine parametrisierte Fläche. Offenbar gilt:

$$\text{Bild } (X) = \{uA + vB + C : u, v \in \mathbb{R}\} = \text{ affine Hyperebene durch } C.$$

An jeder Stelle (u, v) ist dagegen

$$T_{(u, v)}X = \{\lambda A + \mu B : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

denn Tangentialebenen gehen per Definition immer durch $0 \in \mathbb{R}^3$. Hier ist die Tangentialebene die in den Ursprung verschobene affine Ebene $X(\mathbb{R}^2)$.

2.) (**parametrisierte Graphen**) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren die **Graphenabbildung**

$$X : \Omega \ni (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)).$$

Dann ist X eine parametrisierte Fläche im Sinne der

DEFINITION

Differenzierbarkeit und Injektivität sind klar. Weiter ist $X_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$, $X_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$, so dass X_u, X_v überall l.u. sind. Für die Tangentialebene gilt

$$\begin{aligned} T_{(u, v)}X &= \{\lambda(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}) + \mu(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda, \mu, \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Konkret:

a) (**Parabel**) Sei $f(u, v) := u^2 + v^2$, $X(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$. Es ist

$$DX(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

und $T_{(u,v)}X = \{(\lambda, \mu, 2\lambda u + 2\mu v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

b) (**obere Halbsphäre**) Mit $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ sei $f(u, v) := \sqrt{1 - u^2 - v^2}$, $(u, v) \in \Omega$. Dann ist das Bild von $X(u, v) := (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ die obere Halbsphäre in \mathbb{R}^3 . Es gilt

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, -u/\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \\ X_v &= (0, 1, -v/\sqrt{1 - u^2 - v^2}). \end{aligned}$$

Speziell folgt $T_{(0,0)}X = \{(\lambda, \mu, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Oft ändert man das Parametergebiet Ω . Man spricht dann von einer

DEFINITION (Umparametrisierung)

Sei $X; \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus, so heißt $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{X} := X \circ \varphi$, die mit φ umparametrisierte Fläche. Ist $\det D\varphi > 0$, so heißt die Umparametrisierung **orientierungstreu**.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u^2 + v^2 < 1\}, \quad \tilde{\Omega} := \{(r, \theta) : 0 < r < 1, \theta \in [0, 2\pi)\}, \\ \varphi(r, \theta) &:= r(\cos \theta, \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (\text{Polarkoordinaten}) \implies \det D\varphi(r, \theta) = r > 0 \end{aligned}$$

Eine weitere wichtige Notation ist die Einteilung von Vektorfeldern relativ zu einer gegebenen Fläche:

DEFINITION

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

i) Das Vektorfeld V heißt **tangential längs einer Fläche** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, falls gilt:

$$V(u, v) \in T_{(u,v)}X \quad \forall (u, v) \in \Omega$$

ii) Das Feld V wird **normal längs der Fläche** X genannt, falls

$$V(u, v) \in (T_{(u,v)}X)^\perp \quad \forall (u, v) \in \Omega \iff V(u, v) \cdot W = 0 \quad \forall (u, v) \in \Omega, \quad \forall W \in T_{(u,v)}X.$$

Kanonisches Beispiel:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Fläche} \implies \begin{array}{ll} X_u, X_v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 & \text{tangente Felder längs } X, \\ X_u \times X_v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 & \text{normales Feld längs } X. \end{array}$$

beachte: $X_u \times X_v \neq 0$, da X_u, X_v l.u.!

Alle tangentialen VF (=Vektorfelder) längs der Fläche X lassen sich aus X_u, X_v linear kombinieren, genauer:

SATZ 1.

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, V sei **tangentiales** VF längs X . Dann gibt es differenzierbare Funktionen $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $* V(u, v) = \alpha(u, v)X_u(u, v) + \beta(u, v)X_v(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$.

Sind umgekehrt α, β differenzierbar auf Ω , so wird durch $*$ ein tangentiales VF längs X definiert.

Beweis:

Die "umgekehrt" Aussage ist klar! Sei $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ als tangential VF längs X . Da X_u und X_v l.u. sind und $T_{(u,v)}X$ an jeder Stelle $(u, v) \in \Omega$ aufspannen, folgt, dass es eindeutig bestimmte Funktionen $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $*$ gibt. Um deren Differenzierbarkeit zu beweisen, leiten wir Formeln für α, β ab, wobei die Stelle (u, v) fortgelassen wird: Aus $*$ folgt (Skalarprodukt mit X_u und X_v)

$$\begin{aligned} \alpha X_u \cdot X_u + \beta X_u \cdot X_v &= V \cdot X_u, \\ \alpha X_u \cdot X_v + \beta X_v \cdot X_v &= V \cdot X_v. \end{aligned}$$

Historische Symbolik (gemäß Gauß):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \mathcal{E}(u, v) := |X_u|^2, \mathcal{F} := \mathcal{F}(u, v) = X_u \cdot X_v, \\ \mathcal{G} &:= \mathcal{G}(u, v) := |X_v|^2 \end{aligned}$$

Damit schreiben sich obige Gleichungen als

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \mathcal{E} + \beta \mathcal{F} = V \cdot X_u, \\ \alpha \mathcal{F} + \beta \mathcal{G} = V \cdot X_v \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{pmatrix}$$

Die (2×2) -Matrix ist regulär, denn

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix} = \mathcal{E}\mathcal{G} - |\mathcal{F}|^2 = |X_u|^2|X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0,$$

da X_u, X_v l.u. Man kann also auflösen mit dem Ergebnis

$$(**) \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{pmatrix}.$$

An dieser Darstellung von α, β liest man die Differenzierbarkeit von α, β sofort ab, denn die rechte Seite von $(**)$ hängt differenzierbar von (u, v) ab. \square

Für Flächen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind die 3 Vektoren $X_u, X_v, X_u \times X_v$ wichtig, denn sie beschreiben das tangentielle und normale Verhalten der Fläche.

DEFINITION

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Die **Gauß-Abbildung** $N : \Omega \rightarrow S^2$ von X ist per Definition

$$N := X_u \times X_v / |X_u \times X_v|.$$

Das **Gauß'sche Dreibein** ist die positiv orientierte Basis (X_u, X_v, N) von \mathbb{R}^3 .

Bemerkung:

Per Definition ist $|N| \equiv 1$, X_u und X_v haben i.a. Norm $\neq 1$, so dass (X_u, X_v, N) i.a. keine ONB ergibt.

Beispiele:1.) **(Graphenflächen)**

Mit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei $X : \Omega \ni (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Gemäß $X_u = (1, 0, \partial_u f)$, $X_v = (0, 1, \partial_v f)$ erhalten wir

$$X_u \times X_v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial_u f \\ 0 & 1 & \partial_v f \end{pmatrix} = -e_1 \partial_u f - e_2 \partial_v f + e_3 = (-\nabla f, 1),$$

also

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(-\nabla f, 1) .$$

Das ist die Gauß-Abbildung für Graphenflächen (N zeigt "nach oben", d.h. 3^{te} Komponente > 0)

2.) **(Rotationsflächen)**

Viele Flächen lassen sich dadurch erzeugen, dass man eine Kurve im Raum bewegt. Sei etwa $S \subset \mathbb{R}^3$ die Menge, die man erhält, wenn man eine reguläre **ebene** Kurve C um eine Achse dieser Ebene dreht, die die Kurve **nicht** schneidet.

(Bild einfügen.)

Sei etwa die xz -Ebene die Ebene, in der C liegt, und C schneide die z -Achse nicht. Dann kann man die z -Achse als Rotationsachse nehmen. Es sei

$$\alpha : [a, b] \ni t \mapsto (f(t), 0, g(t)) \in \mathbb{R}^3$$

eine Parametrisierung von C . Setzt man

$$X : (0, 2\pi) \times (a, b) \ni (u, v) \mapsto (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

so parametrisiert X offenbar die Fläche S . Man spricht aus naheliegenden Gründen von einer Rotationsfläche. Es gilt

$$X_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0)$$

$$X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)),$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ X_u & & \\ X_v & & \end{vmatrix} = (f(v)g'(v) \cos u, g'(v)f(v) \sin u, -f'(v)f(v)),$$

$$|X_u \wedge X_v| = |f(v)| \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}.$$

Da C die z -Achse nicht schneidet, nimmt man o.e. an, dass C rechts von der z -Achse liegt, also $f(v) > 0$ gilt. Dann ergibt sich für die Gauß-Abbildung

$$N(u, v) = \frac{(g'(v) \cos u, g'(v) \sin u, -f'(v))}{\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}}.$$

Da wir C als regulär annehmen, ist $\alpha'(t) = (f'(t), 0, g'(t)) \neq 0$, also $N(u, v)$ wohldefiniert.

Zum Abschluss dieses §en diskutieren wir, wie sich die Gauß-Abbildung N eine Fläche verhält, wenn man diese Fläche umparametrisiert.

SATZ 2.

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ eine Umparametrisierung von X . Dann gilt für die Gauß-Abbildung \tilde{N} von $\tilde{X} := X \circ \varphi$:

$$\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \text{sign } \det D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) N(\varphi(\tilde{u}\tilde{v})), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}.$$

Bemerkung:

Man nennt $\varphi \left\{ \begin{array}{l} \text{orientierungserhaltend} \\ \text{orientierungsumkehrend} \end{array} \right\}$, falls $\det D\varphi = \left\{ \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \right\}$ ist. Der Satz sagt, dass bei Erhalt der Orientierung unter φ die Gauß-Abbildung unverändert bleibt, man muss sie natürlich an der richtigen Stelle auswerten, also $\tilde{N} = N \circ \varphi$ (und nicht $\tilde{N} = N!$).

Beweis:

Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= DX|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) (\partial_{\tilde{u}} \varphi(\tilde{u}, \tilde{v})) \\ &= (X_u|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} X_v|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}) \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{u}} \varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \partial_{\tilde{u}} \varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix} \\ &= \partial_{\tilde{u}} \varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v}) X_u|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} + \partial_{\tilde{u}} \varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v}) X_v|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}; \end{aligned}$$

analog gilt:

$$\tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \partial_{\tilde{v}} \varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v}) X_u|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} + \partial_{\tilde{v}} \varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v}) X_v|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= |\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}|^{-1} (\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}})(\tilde{u}, \tilde{v}) : \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= [\partial_{\tilde{u}} \varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v}) \partial_{\tilde{v}} \varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v}) - \partial_{\tilde{u}} \varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v}) \partial_{\tilde{v}} \varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v})] X_u \times X_v|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \\ &= \det D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) (X_u \times X_v)|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \end{aligned}$$

also $\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \text{sign } (\det D\varphi) N|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}$. □

§ 2 Erste und Zweite Fundamentalform parametrisierter Flächen

Bevor wir uns mit diesen geometrischen Größen befassen einige **Bemerkungen über quadratische Formen:** Ist T ein \mathbb{R} -Vektorraum, so versteht man unter einer **symmetrischen Bilinearform** β auf T eine Abbildung $\beta : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(U, V) = \beta(V, U) \text{ (Symmetrie)} \\ \beta(aU + bV, W) = a\beta(U, W) + b\beta(V, W) \text{ (Linearität)} \end{array} \right\}$$

für alle $U, V, W, \in T, a, b \in \mathbb{R}$. Zu β gehört die **quadratische Form** $U \mapsto \beta(U, U)$, für die man auch das Symbol $\beta = \beta(U)$ verwendet. β heißt **positiv definit**, falls

$$0 \neq U \in T \implies \beta(U) = \beta(U, U) > 0.$$

Beispiele für symmetrische Bilinearformen, die diese Bedingung erfüllen, sind alle Skalarprodukte, insbesondere auf dem \mathbb{R}^n das Euklidische Skalarprodukt

$$\beta(X, Y) := X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Ist $n = \dim T < \infty$, β eine symmetrische Bilinearform auf T , und hat man eine Basis von T gewählt, die aus den Vektoren e_1, \dots, e_n besteht, so gehört zu β bzgl. (e_1, \dots, e_n) die **Fundamentalmatrix**

$$G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad g_{ij} := \beta(e_i, e_j).$$

Für $U = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, $V = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ folgt

$$\beta(U, V) = \sum_{i, j=1}^n g_{ij} u_i v_j,$$

d.h. mit G kennt man β . **Wie erhält sich die Fundamentalmatrix bei einem Basiswechsel?** Sei $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine weitere Basis und $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Matrix des Basiswechsels, der den Übergang von $\{f_1, \dots, f_n\}$ nach $\{e_1, \dots, e_n\}$ beschreibt, d.h.

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sei schließlich $F = (f_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ die Fundamentalmatrix von β bzgl. $\{f_1, \dots, f_n\}$, $f_{k\ell} := \beta(f_k, f_\ell)$. Dann gilt:

$$g_{ij} = \beta \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} f_\ell, \sum_{k=1}^n a_{jk} f_k \right) = \sum_{k, \ell=1}^n a_{i\ell} a_{jk} \beta(f_\ell, f_k) = \sum_{k, \ell=1}^n a_{i\ell} a_{jk} f_{\ell k},$$

anders gesagt: $G = AFA^t$

$$\begin{aligned} \left[\text{Koeff. in Zeile } i \text{ an Stelle } j \text{ von } AFA^t \right. &= i^{\text{te}} \text{ Zeile von } A^t \cdot \underbrace{j^{\text{te}} \text{ Spalte von } FA^t}_{=:(\xi_{ij} \dots \xi_{nj})} \\ &= a_{i\ell} \xi_{\ell j} \quad (\text{mit Summationskonvention}) \\ &= a_{i\ell} (\ell^{\text{te}} \text{ Zeile von } F \cdot j^{\text{te}} \text{ Spalte von } A^t) \\ &= a_{i\ell} f_{\ell k} a_{jk} \implies (AFA^t)_{ij} = a_{i\ell} f_{\ell k} a_{jk} \left. \right]. \end{aligned}$$

Wir betrachten noch folgende Situation: Seien S, T \mathbb{R} -Vektorräume, $L : S \rightarrow T$ sei linear und β_T sei eine symmetrische Bilinearform auf T . Dann gewinnt man daraus eine symmetrische Bilinearform β_S auf S vermöge $\beta_S(U, V) := \beta_T(LU, LV)$, $U, V \in S$. Man nennt β_S die durch L von β_T induzierte Bilinearform. Ist L injektiv und β_T positiv definit, so auch β_S .

Nun zurück zur Differentialgeometrie:

DEFINITION (1^{te} Fundamentalform)

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

- a) An jeder Stelle $(u, v) \in \Omega$ induziert die Inklusion $T_{(u,v)}X \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ durch das Euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 eine symmetrische Bilinearform auf $T_{(u,v)}X$, die man die **Erste Fundamentalform** nennt, i.Z.: $I_{(u,v)}, g_{(u,v)}$.

Bemerkung:

$I_{(u,v)}$ im Sinne von a) ist also einfach nur die Einschränkung des Euklidischen Skalarprodukts auf $T_{(u,v)}X \times T_{(u,v)}X$.

- b) Die durch die lineare Abbildung

$$DX_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}X$$

und das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 induzierte symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^2 wird ebenfalls Erste Fundamentalform genannt, i.Z. $I_{(u,v)}, g_{(u,v)}$.

Was passiert in b)? Man nimmt $U, V \in \mathbb{R}^2$, transportiert diese Vektoren mit $DX_{(u,v)}$ in $T_{(u,v)}X$ und berechnet dann

$$* \quad \tilde{g}_{(u,v)}(U, V) := DX_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V),$$

also das Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 . Links in $*$ haben wir zur Unterscheidung \tilde{g} statt g geschrieben. $\tilde{g}_{(u,v)}$ definiert nun an jeder Stelle $(u, v) \in \Omega$ ein Skalarprodukt in \mathbb{R}^2 , und schreiben wir $g_{(u,v)}(DX_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V))$ für die rechte Seite von $*$ (vgl. a)), so besteht der Zusammenhang

$$\tilde{g}_{(u,v)}(U, V) = g_{(u,v)}(DX_{(u,v)}(U), DX_{(u,v)}(V)).$$

Nun schreibt man für die linke Seite wieder g statt \tilde{g} , also gilt folgende Konvention/Interpretation:

$$\left| \begin{array}{l} U, V \in \mathbb{R}^2 : g_{(u,v)}(U, V) = I_{(u,v)}(U, V) = DX_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V) \\ \tilde{U}, \tilde{V} \in T_{(u,v)}X : g_{(u,v)}(\tilde{U}, \tilde{V}) = I_{(u,v)}(\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U} \cdot \tilde{V} \end{array} \right.$$

Da man in die Bilinearform aus a) Vektoren mit 3 Komponenten einsetzt, in die aus b) dagegen Vektoren aus \mathbb{R}^2 , besteht keine Verwechslungsgefahr.

Bemerkung:

- 1.) In $T_{(u,v)}X$ haben wir die kanonische Basis $X_u(u, v), X_v(u, v)$ bzgl. derer **die Fundamentalmatrix $G_{(u,v)}$ der 1^{ten} Fundamentalform** lautet

$$\begin{aligned} G_{(u,v)} &= \begin{pmatrix} I(X_u, X_u) & I(X_u, X_v) \\ I(X_v, X_u) & I(X_v, X_v) \end{pmatrix}_{(u,v)} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}_{(u,v)}. \end{aligned}$$

Offenbar ist $G_{(u,v)}$ auch die Fundamentalmatrix von $I_{(u,v)}$ (bei Interpretation als Bilinearform auf \mathbb{R}^2) bzgl. der kanonischen Basis e_1, e_2 von \mathbb{R}^2 .

- 2.) Teil b) der Definition interpretiert die 1^{te} Fundamentalform als eine parameterabhängige Schar $(u, v) \mapsto I_{(u,v)} = g_{(u,v)}, (u, v) \in \Omega$, von Skalarprodukten (s. Satz 3) auf \mathbb{R}^2

SATZ 3.

- i) Die Erste Fundamentalform I einer Fläche $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist **positiv definit**. (Man meint hier $I_{(u,v)} \forall (u, v) \in \Omega$)
- ii) $(u, v) \mapsto I_{(u,v)}$ ist **differenzierbar** auf Ω , d.h. die Koeffizienten $g_{ik} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Fundamentalmatrix sind differenzierbare Funktionen.

Beweis:

- i) klar, wenn $I_{(u,v)}$ gemäß a) definiert wird; gemäß Definitionsvariante b) aber auch klar, da $\text{rg } DX \equiv 2$, also $DX_{(u,v)}$ injektiv, und " $I = DX \cdot DX$ ".
- ii) gemäß $g_{11} = |X_u|^2$, $g_{12} = X_u \cdot X_v$, $g_{22} = |X_v|^2$ ist auch hier nichts weiter zu zeigen.

□

Beispiel:**1.) (Erste Fundamentalform für Graphen)**

Sei $X : \Omega \ni (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ mit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Hier ist an jeder Stelle $(u, v) \in \Omega$

$$\begin{cases} \mathcal{E} &= X_u \cdot X_u &= 1 + (\partial_u f)^2, \\ \mathcal{G} &= X_v \cdot X_v &= 1 + (\partial_v f)^2, \\ \mathcal{F} &= X_u \cdot X_v &= \partial_u f \partial_v f \end{cases}$$

und die Fundamentalmatrix der Ersten Fundamentalform lautet

$$G = \begin{pmatrix} 1 + (\partial_u f)^2 & \partial_u f \partial_v f \\ \partial_u f \partial_v f & 1 + (\partial_v f)^2 \end{pmatrix}.$$

2.) (Erste Fundamentalform für Rotationsflächen)

Wir betrachten O.E.

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

mit $f(v) > 0$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$. Mit

$$X_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0),$$

$$X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$$

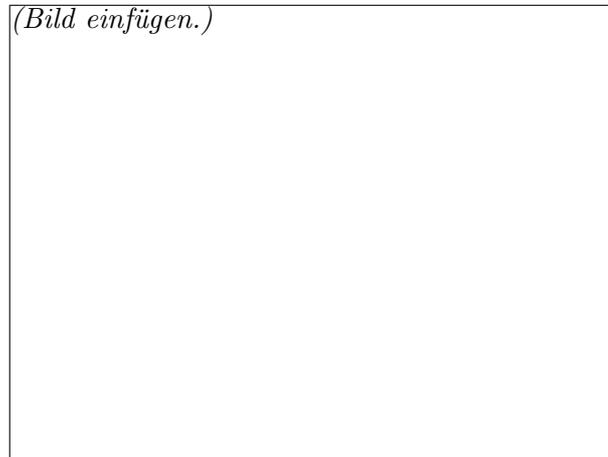
lautet die Fundamentalmatrix an einer beliebigen Stelle (u, v)

$$G_{(u,v)} = \begin{pmatrix} f(v)^2 & 0 \\ 0 & f'(v)^2 + g'(v)^2 \end{pmatrix}.$$

Die Winkelvariable u geht in keiner Weise ein, was nicht überrascht.

Geometrische Interpretation der Ersten Fundamentalform:

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\omega : [a, b] \rightarrow \Omega$ differenzierbar und $\alpha := X \circ \omega$.



α ist Kurve in der Fläche X mit Länge

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \left| \frac{d}{dt}(X \circ \omega)(t) \right| dt = \int_a^b |DX_{\omega(t)}(\omega'(t))| dt.$$

In $DX_{\omega(t)}(\omega'(t))$ wirkt die Ableitung $DX_{\omega(t)}$ von X an der Stelle $\omega(t)$ auf den Tangentenvektor $\omega'(t) \in \mathbb{R}^2$. Mit $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ ist

$$DX_{\omega(t)}(\omega'(t)) = \omega_1'(t)X_u(\omega(t)) + \omega_2'(t)X_v(\omega(t)),$$

also gilt

$$|DX_{\omega(t)}(\omega'(t))| = (DX_{\omega(t)}(\omega'(t)) \cdot DX_{\omega(t)}(\omega'(t)))^{1/2} = I_{\omega(t)}(\omega'(t), \omega'(t))^{1/2},$$

und man bekommt

$$L(X \circ \omega) = \int_a^b I_{\omega(t)}(\omega'(t), \omega'(t))^{1/2} dt.$$

Mit der Ersten Fundamentalform können wir also die Länge der Kurve $X \circ \omega$ berechnen. Später werden wir noch sehen, was I mit Flächenmessung zu tun hat. Wir schauen uns noch an, wie sich I unter “Transformationen” verhält.

SATZ 4 (Invarianz von I)

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

- i) Sei $B := R + T$ mit einer Rotation R und einer Translation T von \mathbb{R}^3 . (B heißt dann eine Bewegung von \mathbb{R}^3 .) Dann ist $\tilde{X} := B \circ X$ eine Fläche (verschoben und rotiert), und es gilt für alle $U, V \in T_{(u,v)}X$:

$$I_{(u,v)}(U, V) = \tilde{I}_{(u,v)}(R(U), R(V)).$$

- ii) Sei $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ eine Parametertransformation und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt für die Erste Fundamentalform \tilde{I} von \tilde{X}

$$\tilde{I}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = I_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \left(D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}), D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}) \right)$$

für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}, \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$.

Beweis:

- i) Dass mit X auch $B \circ X$ eine Fläche ist, folgt trivial, denn $D(B \circ X) = R \circ DX$, und wegen $\text{Rang } R = 3$ folgt $\text{Rang } D(B \circ X) \equiv 2$. Außerdem gilt: $T_{(u,v)}(B \circ X) = R(T_{(u,v)}X)$.
- ii) Für $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}, \tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist per Definition

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) &= D\tilde{X}|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}) \cdot D\tilde{X}|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}) \\ &= \left[(DX|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \circ D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})})(\tilde{U}) \right] \cdot \left[\dots (\tilde{V}) \right] \\ &= DX|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \left(D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}) \right) \cdot DX|_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \left(D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}) \right) \\ &= I_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \left(D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}), D\varphi|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}) \right). \end{aligned}$$

□

Hat die Parametertransformation $\varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ die Form

$$\varphi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = (u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)),$$

so gilt für die Fundamentalmatrizen (\tilde{g}_{ij}) von $\tilde{X} = X \circ \varphi$ und $(g_{k\ell})$ von X die Formel ($\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$)

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}) = \sum_{k, \ell=1}^2 \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}) \frac{\partial u^\ell}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}) g_{k\ell}(\varphi(\tilde{u})).$$

Wir wollen jetzt die **Zweite Fundamentalform** einer Fläche $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, einführen mit dem Fernziel, etwas über die Krümmung von X sagen zu können. Krümmung von X bei $(u, v) \in \Omega$ bedeutet anschaulich die Veränderung der Lage von $T_{(u,v)}X$, die man auch durch die Veränderung des Normalenvektors N messen kann. Deshalb gehen wir zurück zur Gauß-Abbildung $N : \Omega \rightarrow S^2, N = X_u \times X_v / |X_u \wedge X_v|$. Es gilt:

SATZ 5.

$$DN_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) \subset T_{(u,v)}X.$$

Interpretation:

N ist eine Abbildung $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass die Ableitung $DN_{(u,v)}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ darstellt. In Satz 5 steht, dass diese lineare Abbildung Bild im Unterraum $T_{(u,v)}X$ von \mathbb{R}^3 hat.

Beweis:

Es gilt für $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$

$$DN_{(u,v)}(w) = w_1 N_u(u, v) + w_2 N_v(u, v).$$

Nun ist $1 \equiv N \cdot N$, also

$$0 = (N \cdot N)_u = N_u \cdot N, \quad 0 = (N \cdot N)_v = N_v \cdot N.$$

Die Vektorfelder N_u, N_v sind daher orthogonal zu N , m.a.W. sie sind tangential zur Fläche, so dass $DN_{(u,v)}(w) \in T_{(u,v)}X$ bewiesen ist. \square

SATZ (und DEFINITION) 6.

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (U, V) \mapsto -DN_{(u,v)}(U) \cdot DX_{(u,v)}(V) \in \mathbb{R}$$

ist eine **symmetrische Bilinearform** auf \mathbb{R}^2 , genannt die **Zweite Fundamentalform** $II_{(u,v)}$ von X im Punkt $(u, v) \in \Omega$.

Beweis:

Da die Ableitungen $DN_{(u,v)}, DX_{(u,v)}$ linear sind, ist $II_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear. Per Definition von N ist

$$X_u \cdot N = 0 = X_v \cdot N,$$

also:

$$\begin{aligned} N_v \cdot N_u &= (N \cdot X_u)_v - N \cdot X_{uv} = -N \cdot X_{uv}, \\ N_u \cdot X_v &= (N \cdot X_v)_u - N \cdot X_{vu} = -N \cdot X_{uv}, \end{aligned}$$

es folgt

$$N_v \cdot X_u = N_u \cdot X_v.$$

Das bedeutet für die kanonische Basis (e_1, e_2) von \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} II_{(u,v)}(e_1, e_2) &= -DN_{(u,v)}(e_1) \cdot DX_{(u,v)}(e_2) = -N_u(u, v) \cdot X_v(u, v) \\ &= -N_v(u, v) \cdot X_u(u, v) = \dots = II_{(u,v)}(e_2, e_1), \end{aligned}$$

womit die Symmetrie bewiesen ist. \square

Wie auch für I gibt es eine andere Interpretation der Zweiten Fundamentalform: Sind $U, V \in T_{(u,v)}X$, so liegen $(DX_{(u,v)})^{-1}(U) = \tilde{U}$, $(DX_{(u,v)})^{-1}(V) =: \tilde{V}$ in \mathbb{R}^2 und $II_{(u,v)}(\tilde{U}, \tilde{V})$ ist wohldefiniert. Statt $II_{(u,v)}(\tilde{U}, \tilde{V})$ schreibt man

$$II_{(u,v)}^{TX}(U, V) = -DN_{(u,v)}((DX_{(u,v)})^{-1}U) \cdot V.$$

und gewinnt mit $II_{(u,v)}^{TX}$ eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialraum $T_{(u,v)}X$.

DEFINITION (Weingarten-Abbildung)

Die lineare Abbildung $S_{(u,v)} : T_{(u,v)}X \ni U \mapsto -DN_{(u,v)}((DX_{(u,v)})^{-1}U) \in T_{(u,v)}X$ des Tangentialraumes $T_{(u,v)}X$ in sich heißt die **Weingarten-Abbildung** der Fläche X .

Mit dieser Notation können wir schreiben

$$II_{(u,v)}^{TX}(U, V) = S_{(u,v)}(U) \cdot V \text{ für } U, V \in T_{(u,v)}X.$$

Wie sieht die Fundamentalmatrix von $II_{(u,v)}$ bzgl. (e_1, e_2) aus? Es ist nach den Rechnungen zu Satz 6

$$II_{(u,v)}(e_1, e_2) = -N_u(u, v) \cdot X_v(u, v) = -X_{(u,v)} \cdot N_v(u, v) = II_{(u,v)}(e_2, e_1),$$

$$II_{(u,v)}(e_1, e_1) = -N_u(u, v) \cdot X_u(u, v) = N(u, v) \cdot X_{uu}(u, v) =: \mathcal{L},$$

$$II_{(u,v)}(e_2, e_2) = -N_v(u, v) \cdot X_v(u, v) = N(u, v) \cdot X_{vv}(u, v) =: \mathcal{N}.$$

Setzt man noch

$$\mathcal{M} := -X_u(u, v) \cdot N_v(u, v) = N(u, v) \cdot X_{uv}(u, v),$$

so lautet die Fundamentalmatrix bzgl. (e_1, e_2) :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \triangleq II \text{ (auf } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \text{)}.$$

Man erhält dasselbe Resultat für die Fundamentalmatrix von II^{TX} bzgl. der Basis X_u, X_v im Tangentialraum. (Andere Notation: (e, f, g) statt $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$.)

Nach Satz 4 passiert bei Transformation mit der Ersten Fundamentalform "nichts", außer dass man natürlich die Daten (Fußpunkt, eingesetzte Vektoren) entsprechend

transformiert. Bei II ist das nicht ganz so: Die Orientierung der Transformation spielt eine Rolle!

SATZ 7.

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, φ sei eine **orientierungserhaltende** Parametertransformation $\tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$, also $\det D\varphi > 0$. Ist \tilde{II} die Zweite Fundamentalform von $\tilde{X} = X \circ \varphi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, so ist für $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$

$$(1) \quad \tilde{II}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = II_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})} \left(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{V} \right).$$

Entsprechend ist für $U, V \in T_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{X} (= T_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}X !)$

$$(2) \quad \tilde{II}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}^{T\tilde{X}}(U, V) = II_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}^{TX}(U, V).$$

Ist B eine eigentliche Bewegung des \mathbb{R}^3 , also $B = R + T$ mit einer Translation T und einer Rotation R , für die $\det R = 1$ ist, so gilt

$$(3) \quad II_{(u,v)}^{T(B \circ X)}(R(u), R(v)) = II_{(u,v)}^{TX}(U, V) \text{ für alle } U, V \in T_{(u,v)}X.$$

Bemerkung:

Im Fall einer Bewegung B wie oben ist

$$T_{(u,v)}(B \circ X) = R(T_{(u,v)}X),$$

so dass links in (3) die richtigen Stellen eingesetzt werden.

Beweis: Wir beweisen exemplarisch (1), so dass man sieht, wo $\det D\varphi > 0$ eingeht.

(Übung: (2), (3))

Per Definition ist für $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$

$$\tilde{II}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = -D\tilde{N}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}) \cdot D\tilde{X}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}),$$

wobei $\tilde{X} = X \circ \varphi$ ist und \tilde{N} die Gauß-Abbildung von \tilde{X} bezeichnet, $\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}} \right) (\tilde{u}, \tilde{v}) / |\dots|$.

In Satz 2 haben wir gezeigt

$$\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \text{sign det } D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})} N(\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

so dass in unserem Fall gilt $\tilde{N} = N \circ \varphi$.

Die Kettenregel liefert $D\tilde{N}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}) = X_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}))$ sowie $D\tilde{X}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}) = DX_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{V}))$, was nach Einsetzen sofort (1) ergibt. \square

Beispiele für die Berechnung von II :

- 1.) Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $C \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Mit $X : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto uA + vB + C$ hat man eine parametrisierte Ebene. Es ist $N(u, v) = \frac{A \times B}{|A \times B|}$ konstant, also $DN \equiv 0$ und damit $II \equiv 0$.
- 2.) Wir parametrisieren $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ durch räumliche Polarkoordinaten $X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$, $0 <$

$v < 2\pi$. Dann ist

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \\ X_v(u, v) &= (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0), \\ X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin u \cdot \cos v & -\sin u \cdot \sin v & \cos u \\ -\cos u \cdot \sin v & \cos u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos v \cos^2 u, -\sin v \cos^2 u, -\sin u \cos u), \\ |X_u \times X_v| &= (\cos^2 v \cos^4 u + \sin^2 v \cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u)^{1/2} \\ &= (\cos^4 u + \sin^2 u \cos^2 u)^{1/2} \\ &= (\cos^4 u + [1 - \cos^2 u] \cos^2 u)^{1/2} = \cos u, \\ N(u, v) &= (-\cos v \cos u, -\sin v \cos u, -\sin u) = -X(u, v). \end{aligned}$$

Gemäß $II \hat{=} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -N_u \cdot X_u &= -(\cos v \sin u, \sin v \sin u, -\cos u) \cdot (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \\ &= \cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v \sin^2 u + \cos u \equiv 1, \\ \mathcal{M} = -N_u \cdot X_v &= -(\cos v \sin u, \sin v \sin u, -\cos u) \cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \\ &= \cos v \sin u \cos u \sin v - \sin v \sin u \cos u \cos v \equiv 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = -N_v \cdot X_v &= -(\sin v \cos u, -\cos v \cos u, 0) \cdot (-\cos u \sin u, \cos u \cos v, 0) \\ &= \sin^2 v \cos^2 u + \cos^2 v \cos^2 u = \cos^2 u. \end{aligned}$$

Also: $II_{(u,v)} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$ (bzgl. Basis $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$).

Es ist $I_{(u,v)} \hat{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$ mit $\mathcal{E} = |X_u|^2 = 1$, $\mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0$ und $\mathcal{G} = |X_v|^2 = \cos^2 u$, so dass gilt $II_{(u,v)} = I_{(u,v)}$. Hat die Sphäre den Radius $R > 0$, so folgt

$$II_{(u,v)} = \frac{1}{R} I_{(u,v)}$$

3.) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ die zugehörige Graphenfläche. Wir wissen

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 1 + f_u^2, \quad \mathcal{F} = f_u f_v, \quad \mathcal{G} = 1 + f_v^2, \\ N &= (-f_u, -f_v, 1) / \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}, \\ \mathcal{L} &= N \cdot X_{uu} = f_{uu} / \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}, \\ \mathcal{M} &= N \cdot X_{uv} = f_{uv} / \sqrt{\dots}, \\ \mathcal{N} &= N \cdot X_{vv} = f_{vv} / \sqrt{\dots}, \end{aligned}$$

wobei man $1 + f_u^2 + f_v^2$ ersetzt durch $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2$. Damit folgt: ($D^2 f =$ Hesse-Matrix von f)

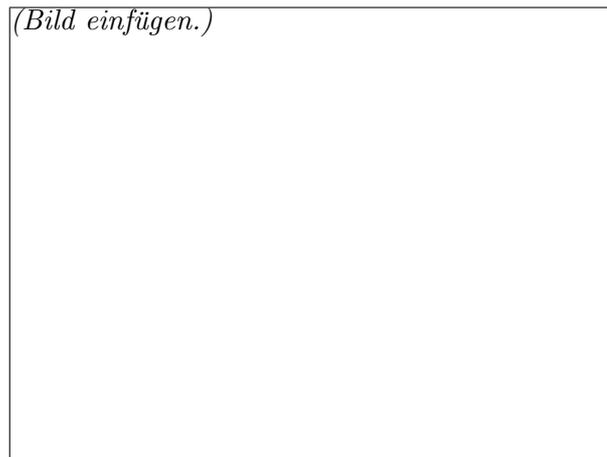
$$II = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} D^2 f \quad (\text{Formel für Graphenflächen})$$

□

Um noch eine weitere geometrische Bedeutung von I zu beleuchten überlegen wir uns mit einer Plausibilitätsbetrachtung, dass

$$A_{\Omega}(X) = \int_{\Omega} |X_u \wedge X_v| du dv$$

ein vernünftiges Maß für den Flächeninhalt der parametrisierten Flächen ergibt, vorausgesetzt $\int_{\Omega} \dots < \infty$.



Man überdeckt Ω möglichst fein mit kleinen Quadraten und ersetzt X auf $Q = Q(w_0)$ durch $(u, v) \mapsto (u - u_0)X_u(w_0) + X_v(w_0)(v - v_0) + X(w_0)$. Aus Q wird ein Parallelogramm mit dem Inhalt $|X_u(w_0) \times X_v(w_0)| \cdot |Q(w_0)|$. Der Flächeninhalt von $X(\Omega)$ ist dann in guter Näherung

$$\sum_{Q(w_0)} |X_u(w_0) \times X_v(w_0)| |Q(w_0)| \longrightarrow \int_{\Omega} |X_u \times X_v| du dv,$$

wobei die Konvergenz

“ \longrightarrow ” bedeutet, dass die Zerlegung von Ω immer feiner werden soll. Das Ergebnis lautet daher:

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt von } X(\Omega) &= \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{|X|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2} du dv = \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} du dv = \int_{\Omega} \sqrt{\det G} du dv \end{aligned}$$

Hierin ist $G = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$ die Matrix von I bzgl. der Basis e_1, e_2 von \mathbb{R}^2 . Zusammen mit der Rechnung von p. ? sieht man:

Die **Erste Fundamentalform** I von X ist zuständig für die Messung von Längen und Flächeninhalten auf der Fläche X .

Nun endlich zur geometrischen Bedeutung von II : Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ wie immer, $\varepsilon > 0$ und $\omega : [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega$, $\omega(0) = w$, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ eine Kurve in Ω , die die Kurve $\alpha := X \circ \omega$ auf der Fläche X induziert. Die Kurve α startet in $\alpha(0) = X(w)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\alpha'(0) = DX|_w(\omega'(0)) = \omega'_1(0)X_u(w) + \omega'_2(0)X_v(w).$$

Für unsere Rechnungen sei α nach der Bogenlänge parametrisiert, $\alpha = \alpha(s)$. Dann ist $t(s) = \alpha'(s)$ der

Einheitstangentenvektor und $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$ die

Krümmung von α in s . Für $\kappa(s) \neq 0$ ist der

Normalenvektor $n(s)$ definiert durch die Gleichung $t'(s) = \kappa(s)n(s)$.

Nachfolgend sei (u_1, u_2) die Variable aus Ω , und wir benutzen **Summationskonvention**.

Aus

$$t(s) = \alpha'(s) = \omega'_i(s)X_{u_i}(\omega(s))$$

folgt

$$(1) \quad t'(s) = \alpha''(s) = \omega''_i(s)X_{u_i}(\omega(s)) + \omega'_i(s)\omega'_j(s)X_{u_i u_j}(\omega(s)).$$

Wie üblich bezeichne $N : \Omega \rightarrow S^2$ die Gauß-Abbildung von X . Man wählt $s = 0$ in (1) und bildet das Skalarprodukt mit $N(w) = N(\omega(0))$ (beachte $N \cdot X_{u_i} = 0$):

$$\begin{aligned} N(w) \cdot t'(0) &= \omega'_i(0)\omega'_j(0)X_{u_i u_j}(w) \cdot N(w) \\ &= \omega'_i(0)\omega'_j(0) \left[\frac{\partial}{\partial u_i} (X_{u_j}(w) \cdot N(w)) - X_{u_j}(w) \cdot N_{u_i}(w) \right] \\ &= -\omega'_i(0)\omega'_j(0)X_{u_j}(w)N_{u_i}(w) \\ &= -DX_w(\omega'(0)) \cdot DN_w(\omega'(0)) = II_w(\omega'(0), \omega'(0)) \\ &= II_w^{TX}(\alpha'(0), \alpha'(0)) = S_w(\alpha'(0), \alpha'(0)), \end{aligned}$$

wo $S_w : T_w X \rightarrow T_w X$ die Weingarten-Abbildung ist und II die Zweite Fundamentalf orm. Mit der Definition von κ und n wird daraus:

$$(2) \quad \kappa(0)N(w) \cdot n(0) = II_w^{TX}(\alpha'(0), \alpha'(0)),$$

und daraus erkennt man, dass II mit "Krümmung zu tun hat".

Längs α definieren wir die "Vektorfelder" $\bar{N}(s) := N(\omega(s))$, $\bar{s}(s) := \bar{N}(s) \times t(s)$. Es gilt $\bar{s}(s) \in T_{\omega(s)}X$, denn $\bar{s}(s) \perp t(s)$ und $\bar{s}(s) \perp \bar{N}(s) = \text{Erzeuger von } (T_{\omega(s)}X)^\perp$, so dass $\bar{s}(s)$ nicht nur tangential ist, sondern sogar mit $t(s)$ eine ONB von $T_{\omega(s)}X$ bildet:

$$T_{\omega(s)}X = \text{Span} [t(s), \bar{s}(s)]$$

Der Vektor $t'(s)$ ist senkrecht zu $t(s)$, so dass

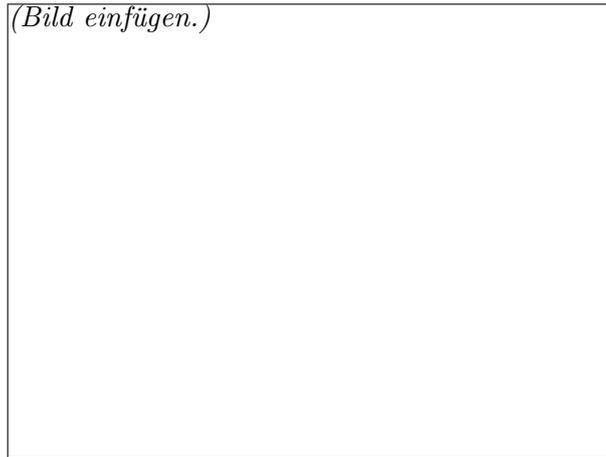
$$(3) \quad t'(s) = \kappa_g(s)\bar{s}(s) + \kappa_n(s)\bar{N}(s)$$

mit eindeutig bestimmten Skalaren $\kappa_g(s), \kappa_n(s)$ gilt. Offenbar ist

$$(4) \quad \kappa_g = t' \cdot \bar{s}, \quad \kappa_n = t' \cdot \bar{N}.$$

Die Skizze soll die Situation illustrieren. Wir haben dabei alle Vektoren - zur Vereinfachung - im Flächenpunkt $X(\omega(s)) = \alpha(s)$ aufgehängt.

(Bild einfügen.)



$$\begin{aligned} \Theta := \Theta(s) &:= \text{Winkel zwischen } t' \text{ und } \bar{N} \text{ zurzeit } s \\ &= \text{Winkel zwischen } n(s) \text{ und } \bar{N}(s) \end{aligned}$$

DEFINITION

Man nennt $\kappa_g(s)$ bzw. $\kappa_n(s)$ die **geodätische Krümmung** bzw. die **Normalkrümmung der Kurve α in s** . [Do Carmo, deutsche Version p.190]

Per Definition des Winkels Θ ist

$$\cos \Theta(s) = n(s) \cdot \bar{N}(s),$$

außerdem ergeben (3) und (4) wegen $t' = \kappa n$

$$\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}.$$

Aus (3) folgt außerdem

$$\begin{aligned}\kappa_g &= t' \cdot \bar{s} = \kappa n \cdot \bar{s} = \pm \kappa \sin \Theta, \\ \kappa_n &= t' \cdot \bar{N} = \kappa n \cdot \bar{N} = \kappa \cos \Theta,\end{aligned}$$

und gemäß (2) haben wir

$$(5) \quad \kappa_n(0) = II_{\omega(0)}^{TX}(\alpha'(0), \alpha'(0))$$

D.h.: Fixieren wir einen Punkt w in Ω sowie einen Einheitsvektor $\xi \in T_w X$, so misst $II_w^{TX}(\xi, \xi)$ die sogenannte Normalkrümmung einer Kurve α im Punkt 0, vorausgesetzt $\alpha(0) = X(w)$, $\alpha'(0) = \xi$, $\kappa(0) > 0$ und α ist nach der Bogenlänge parametrisiert. (5) zeigt (schaue auf die rechte Seite!), dass der Wert $\kappa_n(0)$ gar nicht davon abhängt, welche spezielle Kurve α man wählt, d.h. wir haben bewiesen

SATZ 8. (von Meusnier)

Alle Kurven auf der Fläche X , die in einem gegebenen Punkt dieselbe Tangente haben, besitzen in diesem Punkt dieselbe **Normalkrümmung**.

Die Krümmungen selbst müssen natürlich nicht gleich sein, der Satz stellt nur fest, dass die Eigenschaften, in der Fläche zu verlaufen und eine gemeinsame Tangente zu haben, einen Teil der Krümmung bereits festlegen.

Übung:

Man diskutiere "alles" für den Fall, das X eine regulär parametrisierte Fläche ist.

Sei jetzt $\xi \in T_w X - \{0\}$ ein beliebiger Vektor, dessen Länge mit der Ersten Fundamentalform gemessen wird:

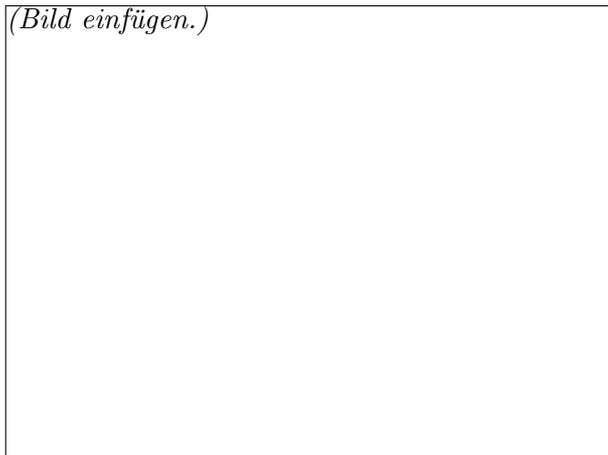
$$|\xi| = I_w(\xi, \xi)^{1/2}$$

Dann betrachtet man eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\tilde{\alpha}$ mit Spur auf der Fläche sowie $\tilde{\alpha}(0) = X(w)$, $\tilde{\alpha}'(0) = \xi/|\xi|$. Dann ergibt (5):

$$(6) \quad \text{Normalkrümmung von } \tilde{\alpha} \text{ in } 0 = II_w(\xi, \xi)/I_w(\xi, \xi)$$

Wir betrachten folgende Situation: Sei $w \in \Omega$ fixiert sowie ein Vektor $W(w) \in T_w X$. Dazu betrachten wir die Ebene, die von $W(w)$ und $N(w)$ aufgespannt wird und durch $X(w)$ verläuft.

(Bild einfügen.)



Sei γ der Schnitt dieser Ebene mit X , also regulär mit $\gamma(0) = X(w)$, $\gamma'(0) = W$, Spur $\gamma \subset \text{Bild } X \cap \text{Ebene}$. Offenbar ist $t'(0) = \gamma''(0)$ Vielfaches von $N(w)$, denn alle Kurventangenten liegen in der Ebene, mithin auch $t'(0)$ und $t'(0) \perp W$. Es folgt (vgl. (3)!)

$$(7) \quad \kappa_g = 0 \quad \text{und} \quad \kappa_n = \pm \kappa,$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob $t'(0)$ und $N(w)$ gleichgerichtet sind. Eine Kurve der oben beschriebenen Art nennt man einen Normalschnitt der Fläche X im Punkt $X(w)$. Gemäß (6) und (7) misst der sogenannte

Rayleigh-Quotient II_w/I_w

die **Krümmung aller möglichen Normalschnitte im Punkt** $X(w)$, wobei in II_w/I_w der gewählte Vektor $W \in T_w X$ einzusetzen ist. Das Vorzeichen hängt davon ab, ob $n(0) = N(w)$ oder $= -N(w)$ ist. Im nächsten Abschnitt werden wir uns für die Extremwerte des Rayleigh-Quotienten interessieren, also für die größt- und kleinstmöglichen Krümmungen bei Normalschnitten.

§ 3 Krümmungsbegriffe für Flächen

DEFINITION

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die Zahlen

$$\begin{aligned} \kappa_1(w) &:= \min\{II_w(V, V)/I_w(V, V) : V \in T_w X - \{0\}\} \\ &= \min\{II_w(V, V) : V \in T_w X, |V| = 1\}, \\ \kappa_2(w) &:= \max\{II_w(V, V) : V \in T_w X, |V| = 1\} \end{aligned}$$

heißen die Hauptkrümmungen der Fläche X im Punkt w .

Bemerkungen:

- 1.) κ_1, κ_2 sind wohldefiniert, da $T_w X \ni V \mapsto II_w(V, V)$ stetig ist, und die Einheitstangentenvektoren eine kompakte Menge bilden.
- 2.) Mit der Weingarten-Abbildung $S_w : T_w X \rightarrow T_w X$ können wir oben $II_w(V, V)$ durch $S_w(V) \cdot V$ ersetzen.
- 3.) Interpretation: Eine Fläche X hat in $X(w)$ zunächst nicht wie eine Kurve im Punkt s eine kanonische Krümmung. Vielmehr schaut man sich Normalschnitte der Fläche X in $X(w)$ an, ermittelt mit dem Rayleigh-Quotienten (abgesehen vom Vorzeichen) die Krümmung dieser Schnittkurven und bestimmt davon Max. und Min.
- 4.) Es gibt $V_1, V_2 \in T_w X$ mit Länge 1, so dass

$$\kappa_1(w) = II_w(V_1, V_1) \text{ und } \kappa_2(w) = II_w(V_2, V_2)$$

gilt.

SATZ 9.

Sei X eine Fläche $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $w \in \Omega$.

- a) **Die Hauptkrümmungen sind genau die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung** $S_w : T_w X \rightarrow T_w X$.
- b) Es gibt Einheitsvektoren V_1, V_2 mit $V_1 \cdot V_2 = 0$ und $S_w(V_i) = \kappa_i(w)V_i$. Solche Vektoren heißen **Hauptkrümmungsrichtungen**.

Beweis:

Sei $V_1 \in T_w X$ mit $|V_1| = 1$ minimal, also $II_w(V_1, V_1) \leq II_w(V, V)/I_w(V, V)$ für alle $V \in T_w X - \{0\}$. (Existenz: minimiere $II_w(V, V)$ auf $|V| = 1$!) Für $|\varepsilon|$ klein genug ist $V_1 + \varepsilon V$, $V \in T_w X$, dann $\neq 0$, d.h.

$$\begin{aligned} II_w(V_1, V_1) &\leq II_w(V_1 + \varepsilon V, V_1 + \varepsilon V) / I_w(V_1 + \varepsilon V, V_1 + \varepsilon V) \\ &\Rightarrow \kappa_1(w) \{I_w(V_1, V_1) + 2\varepsilon I_w(V_1, V) + \varepsilon^2 I_w(V, V)\} \\ &\leq II_w(V_1, V_1) + 2\varepsilon II_w(V_1, V) + \varepsilon^2 II_w(V, V) \end{aligned}$$

Es ist $II_w(V_1, V_1) = \kappa_1$, $I_w(V_1, V_1) = 1$, also bekommt man ($\kappa_1 = \kappa_1(w)$)

$$2\varepsilon \kappa_1 I_w(V_1, V) + \varepsilon^2 \kappa_1 I_w(V, V) \leq 2\varepsilon II_w(V_1, V) + \varepsilon^2 II_w(V, V).$$

Dividiert man durch $\varepsilon > 0$ und lässt ε gegen 0 gehen, so folgt

$$2\kappa_1 I_w(V_1, V) \leq 2II_w(V_1, V) \implies \kappa_1 V_1 \cdot V \leq S_w(V_1) \cdot V.$$

Dies gilt für jeden Vektor V , m.a.W.: $S_w(V_1) = \kappa_1(w)V_1$, das heißt $\kappa_1(w)$ ist Eigenwert der Weingarten-Abbildung mit zugehörigem Eigenvektor V_1 . Entsprechend rechnet man nach, dass auch $\kappa_2(w)$ Eigenwert von S_w sein muss. Nun ist S_w selbstadjungiert, besitzt also in $T_w X$ eine ONB aus Eigenvektoren. Es gibt daher $V_2 \perp V_1$, $|V_2| = 1$, und $S_w(V_2) = \kappa_2(w)V_2$. \square

Bemerkung:

Die letzte Feststellung (Existenz einer ONB aus EV) im Beweis des Satzes gilt natürlich auch im Fall $\kappa_1(w) = \kappa_2(w)$. Dann hat der Eigenraum zu $\kappa_1(w)$ die Dimension 2, also $S_w(V) = \kappa_1(w)V$ auf $T_w X$. Gilt $\kappa_1(w) = \kappa_2(w)$, so heißt w ein **Nabelpunkt der Fläche**. Im Fall $\kappa_1(w) = 0 = \kappa_2(w)$ wird w **Flachpunkt** genannt.

Beispiele:

- 1.) Für die durch $X(u, v) := R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $R > 0$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $v \in (0, 2\pi)$ parametrisierte Kugel mit Radius R haben wir gezeigt $II_{(u,v)} = \frac{1}{R}I_{(u,v)}$, d.h. alle Punkte sind Nabelpunkte mit Hauptkrümmungen $1/R$.
- 2.) Für jede parametrisierte Ebene ist $II \equiv 0$, alle Punkte sind (wie es sein sollte,) Flachpunkte.
- 3.) Flachpunkte können auch im nicht-ebenen Fall auftreten: Sei $f(u, v) = u^4 + v^4$ und $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Wir haben gezeigt

$$II_{(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} D^2 f(u, v)$$

In $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist aber $D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so dass $II_{(0,0)} \equiv 0$ und damit $\kappa_1(0, 0) = 0 = \kappa_2(0, 0)$.

SATZ 10.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist jeder Punkt $w \in \Omega$ ein Nabelpunkt, so liegt $X(\Omega)$ in einer Ebene oder eine Kugel.

Beweis.

Sei $S_w : T_w X \rightarrow T_w X$, $w \in \Omega$ die Weingarten Abbildung. Nach Voraussetzung ist für alle $w \in \Omega$

$$\kappa_1(w) = \lambda(w) = \kappa_2(w),$$

d.h. $S_w(V) = \lambda(w)V \forall w \in \Omega, V \in T_w X$. Es gilt $V = V_1 X_u(w) + V_2 X_v(w)$ und damit $S_w(V) = V_1 S_w(X_u(w)) + V_2 S_w(X_v(w)) = (\text{Definition von } S_w) = -V_1 N_u(w) - V_2 N_v(w)$, d.h.

$$\lambda(w)(V_1 X_u(w) + V_2 X_v(w)) = -V_1 N_u(w) - V_2 N_v(w) \forall w \in \Omega, V_1, V_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff V_1(\lambda(w)X_u(w) + N_u(w)) + V_2(\lambda(w)X_v(w) + N_v(w)) = 0$$

Es folgt $* - N_u = \lambda X_u, -N_u = \lambda X_v$, also $(\lambda X_u)_v = (\lambda X_v)_u$. Ausrechnen ergibt $\lambda_v X_u - \lambda_u X_v \equiv 0$, und da X_u, X_v überall linear unabhängig sind, gilt $\lambda_v = \lambda_u \equiv 0$, also $\lambda(w) \equiv \lambda$ denn Ω ist zusammenhängend.

Fall 1: $\lambda = 0$

Dann ist $N_u = N_v \equiv 0$ nach obigen Gleichungen, die Gauß-Abbildung also konstant. Es folgt

$$\begin{aligned} (X \cdot N)_u &= X_u \cdot N = 0, \\ (X \cdot N)_v &= X_v \cdot N = 0, \end{aligned}$$

mithin $X(w) \cdot N \equiv \text{const}$. Es folgt $(X(w) - X(w_0)) \cdot N = 0$, so dass $X(w) - X(w_0) \in N^\perp$ ist. Hier ist $w_0 \in \Omega$ beliebig fixiert. Dann hat aber X Bild in der Ebene durch $X(w_0)$ senkrecht zu N .

Fall 2: $\lambda \neq 0$

Dann betrachtet man die Abbildung $(u, v) \mapsto X(u, v) + \frac{1}{\lambda} N(u, v)$. Aus $*$ folgt $(X + \frac{1}{\lambda} N)_u = 0 = (X + \frac{1}{\lambda} N)_v$, also $X(u, v) + \frac{1}{\lambda} N(u, v) \equiv Y_0 \in \mathbb{R}^3$. Das ergibt $|X(u, v) - Y_0| = |\frac{1}{\lambda} N(u, v)| = \frac{1}{|\lambda|}$, Bild (X) ist enthalten in der Sphäre um Y_0 mit Radius $\frac{1}{|\lambda|}$. \square

DEFINITION

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Hauptkrümmungen $\kappa_1, \kappa_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißen

$$H(w) := \frac{1}{2}(\kappa_1(w) + \kappa_2(w)), \quad K(w) := \kappa_1(w)\kappa_2(w)$$

die **mittlere Krümmung** und die **Gauß- Krümmung** der Fläche X in w .

Bemerkung:

Definiert man neben

$$I_w(V, W) = V \cdot W, \quad II_w(V, W) = S_w(V) \cdot W,$$

$w \in \Omega, V, W \in T_w X$ noch die **Dritte Fundamentalform** $III_w(V, W) := S_w(V) \cdot S_w(W)$, so gilt die Formel

$$III - 2HII + KI \equiv 0$$

Wir leiten Formeln für H und K ab:

Seien $w = (u_1, u_2)$ die Punkte aus Ω . Es seien

$$\begin{aligned} G &= (g_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & G \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |X_{u_1}|^2 & X_{u_1} \cdot X_{u_2} \\ X_{u_1} \cdot X_{u_2} & |X_{u_2}|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$B = (b_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

($\mathcal{L} = N \cdot X_{u_1 u_1}$, $\mathcal{M} = N \cdot X_{u_1 u_2}$, $\mathcal{N} = N \cdot X_{u_2 u_2}$) die Fundamentalmatrizen von I und II bzgl. e_1, e_2 (oder X_u, X_v). G ist invertierbar mit

$$G^{-1} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix}, w := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2.$$

Die Ableitung $N_{u_1}(w), N_{u_2}(w)$ der Gauß-Abbildung liegen in $T_w X$ (,denn $N \cdot N = 1 \implies 0 = \frac{\partial}{\partial u_i}(N \cdot N) = 2N_{u_i} \cdot N$, so dass $N_{u_i}(w) \in N^\perp(w) = T_w X$), und da $X_{u_1}(w), X_{u_2}(w)$ eine Basis von $T_w X$ ist, gibt es eindeutig Koeffizientenfunktionen $a_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta(w)$ mit

$$(1) \quad N_{u_\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 a_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \alpha = 1, 2.$$

Es folgt $N_{u_\alpha} \cdot X_{u_\gamma} = \sum_{\beta=1}^2 a_\alpha^\beta X_{u_\beta} \cdot X_{u_\gamma} = \sum_{\beta=1}^2 a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma}$, auf der linken Seite steht aber gerade $-b_{\alpha\gamma}$, d.h.

$$-b_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^2 a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma}$$

Schreibt man $G^{-1} = (g^{ik})_{1 \leq i, k \leq 2}$, so folgt:

$$-\sum_{\gamma=1}^2 b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\nu} = \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 1 a_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\nu} = a_\alpha^\nu.$$

Damit haben wir die Koeffizienten a_α^β aus (1) mit "G und B" ausgerechnet und die Weingarten-Gleichung

$$(2) \quad N_{u_\alpha} = - \sum_{\beta=1}^2 b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad b_\alpha^\beta := \sum_{\gamma=1}^2 b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$$

abgeleitet. Nach Satz 9 sind die Hauptkrümmungen die Eigenwerte von

$$S_w : T_w X \rightarrow T_w X. \text{ Mit } V = \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha X_{u_\alpha}(w), W = \sum_{\alpha=1}^2 W_\alpha X_{u_\alpha}(w) \in T_w X \text{ gilt}$$

$$(3) \quad S_w V = \kappa V \iff S_w V \cdot W = \kappa V \cdot W \quad \forall W \in T_w X,$$

und per Definition von S_w ist

$$S_w(V) = \sum_{\alpha=1}^2 S_w(X_{u_\alpha}(w)) V_\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 S_w(DX|_w(e_\alpha)) V_\alpha = - \sum_{\alpha=1}^2 V_\alpha N_{u_\alpha}(w),$$

so dass (3) übergeht in $S_w V = \kappa V \iff$

$$\forall W_1, W_2 \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 V_\alpha W_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) = \kappa \sum_{\alpha, \beta=1}^2 V_\alpha W_\beta X_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) \\ \iff - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 V_\alpha W_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) = \kappa \sum_{\alpha, \beta=1}^2 V_\alpha W_\beta g_{\alpha\beta}(w) \\ \iff + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta}(w) V_\alpha W_\beta = \kappa \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta}(w) V_\alpha W_\beta \end{array} \right.$$

$$\iff \boxed{\sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha\beta}(w) V_\alpha = \kappa \sum_{\alpha=1}^2 g_{\alpha\beta}(w) V_\alpha}$$

Wegen der Symmetrie von G und B ist die Eigenwertgleichung $S_w V = \kappa V$ äquivalent zum System

$$B\tilde{V} = \kappa G\tilde{V}, \quad \tilde{V} = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2,$$

bzw. zu

$$(G^{-1}B)\tilde{V} = \kappa\tilde{V},$$

so dass man zur Berechnung der Eigenwerte $\kappa = \kappa_1(w), \kappa_2(w)$ die Nullstellen des Polynoms

$$\boxed{\lambda \mapsto \det(G^{-1}B - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

zu bestimmen hat. Somit ist gezeigt:

Satz 11.

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die Hauptkrümmungen $\kappa_1(w), \kappa_2(w)$ von X in $w \in \Omega$ sind die Nullstellen von $\lambda \mapsto \det(G^{-1}B - \lambda \mathbf{1})$, wobei $G =$ Matrix von I , $B =$ Matrix von II (jeweils in w). Es gilt:

$$(4) \quad \boxed{\begin{array}{l} K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(G^{-1}B) \stackrel{(2)}{=} \det(b_\alpha^\beta), \\ H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \text{Spur}(G^{-1}B) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2}(b_1^1 + b_2^2). \end{array}}$$

Insbesondere erkennt man, dass K und H durch die Koeffizienten b_α^β der Weingarten-Gleichung (2) bestimmt werden. Mit der Formel für G^{-1} gilt

$$G^{-1}B = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \mathcal{G}\mathcal{L} - \mathcal{F}\mathcal{M} & \mathcal{G}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{N} \\ -\mathcal{F}\mathcal{L} + \mathcal{E}\mathcal{M} & -\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{E}\mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad W := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2,$$

also

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} (\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{F}\mathcal{M}),$$

$$K = \frac{1}{\det G} \det B = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}.$$

Dies sind **explizite Formeln** für die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung von X in w in Termen der Koeffizienten der Fundamentalmatrizen von I_w und II_w .

Die Gauß-Krümmung erlaubt folgende Interpretation, die von Gauß ursprünglich als Definition gewählt wurde: Mit den Weingarten-Gleichungen (2) ist $(w = (u_1, u_2) \in \Omega)$

$$\begin{aligned} N_{u_1} \times N_{u_2} &= \left(\sum_{\beta=1}^2 b_1^\beta X_{u_\beta} \right) \times \left(\sum_{\gamma=1}^2 b_2^\gamma X_{u_\gamma} \right) \\ &= (b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1) X_{u_1} \times X_{u_2} \stackrel{(4)}{=} K X_{u_1} \times X_{u_2}. \end{aligned}$$

Sei $w_0 \in \Omega, \varepsilon > 0, \Omega_\varepsilon := \{w \in \Omega : |w - w_0| < \varepsilon\}$. Die Fläche $X(\Omega_\varepsilon)$ hat den Inhalt

$$A_{\Omega_\varepsilon}(X) = \int_{\Omega_\varepsilon} |X_{u_1} \times X_{u_2}| du_1 du_2.$$

Nun interpretiert man die Gauß-Abbildung N auch als Fläche: Ist z.B. $K(w_0) \neq 0$, so auch $K \neq 0$ auf Ω_ε für $\varepsilon \ll 1$, so dass gemäß N_{u_1}, N_{u_2} wegen (*) $N_{u_1} \times N_{u_2} = K X_{u_1} \times X_{u_2} \neq 0$ linear unabhängig sind, was die Interpretation rechtfertigt. Für den Inhalt von $N(\Omega_\varepsilon)$ folgt

$$A_{\Omega_\varepsilon}(N) = \int_{\Omega_\varepsilon} |N_{u_1} \times N_{u_2}| du dv \stackrel{(*)}{=} \int_{\Omega_\varepsilon} |K| |X_{u_1} \times X_{u_2}| du_1 du_2,$$

also

$$|K(w_0)| = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A_{\Omega_\varepsilon}(N) / A_{\Omega_\varepsilon}(X).$$

Ist $K \neq 0$ auf Ω_ε , so ist die Flächennormale $\bar{N} := (N_{u_1} \times N_{u_2}) / |N_{u_1} \times N_{u_2}|$ an die Fläche N wohldefiniert (vgl. (*)), und es gilt (wieder wegen (*)) $\bar{N} = N$, falls $K > 0$, $\bar{N} = -N$, falls $K < 0$. Man nennt $N : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ das sphärische Bild von X .

Mit Hilfe der Krümmungsbegriffe wollen wir nun das lokale Verhalten von Flächen etwas näher diskutieren.

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $w \in \Omega$ sei fixiert. Mit T bezeichnen wir die (affine!) Tangentialebene an X in $X(w)$, also

$$T = X(w) + T_w X.$$

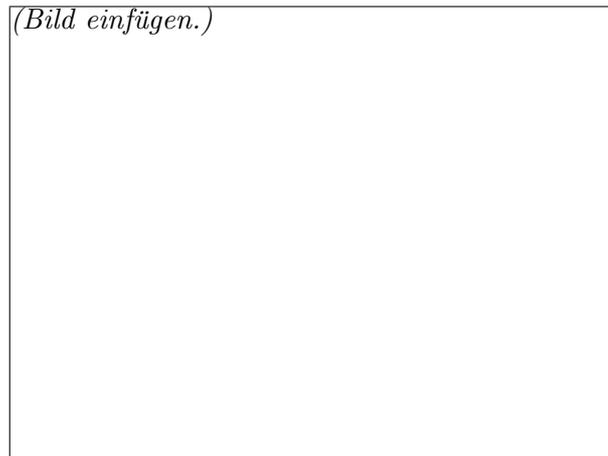
T zerlegt \mathbb{R}^3 in zwei Halbräume R_+^3, R_-^3 , R_+^3 sei derjenige Teil, in den $N(w)$ hineinzeigt, also

$$R_+^3 := \{Q \in \mathbb{R}^3 : (Q - X(w)) \cdot N(w) \geq 0\}$$

Für $Q \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\delta(Q) := (Q - X(w)) \cdot N(w)$$

der **orientierte Abstand** von Q zu T . Wir wollen $\delta \underbrace{(X(w+h))}_{=:Q}$



ausrechnen für $h = (h_1, h_2)$, $|h| \ll 1$. Nach Taylor ist

$$\begin{aligned} \delta(Q) &= (X(w+h) - X(w)) \cdot N(w) = \sum_{\alpha=1}^2 X_{u_\alpha}(w) h_\alpha \cdot N(w) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 X_{u_\alpha u_\beta}(w) h_\alpha h_\beta \cdot N(w) + R(h) \end{aligned}$$

mit $|h|^{-2} R(h) \rightarrow 0$ bei $h \rightarrow 0$. Gemäß $X_{u_\alpha}(w) \cdot N(w) = 0$, $\alpha = 1, 2$, folgt

$$\delta(X(w+h)) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta}^2 X_{u_\alpha u_\beta}(w) h_\alpha h_\beta \cdot N(w) + R(h).$$

Sei $V_h := \sum_{\alpha=1}^2 h_\alpha X_{u_\alpha}(w) \in T_w X$. Es ist

$$\begin{aligned} II_{(w)}(V_h, V_h) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 h_\alpha h_\beta II(X_{u_\alpha}(w), X_{u_\beta}(w)) \\ &= - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 h_\alpha h_\beta N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) \\ &= + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 h_\alpha h_\beta N(w) \cdot X_{u_\alpha u_\beta}(w), \end{aligned}$$

zusammen:

$$(5) \quad \delta(X(w+h)) = \frac{1}{2}II(V_h, V_h) + R(h) .$$

Feststellung:

Die Größe $\frac{1}{2}II_{(w)}(V_h, V_h)$ misst die Höhe mit Orientierung des Punktes $X(w+h)$ über der affinen Tangentialebene T (bis auf Fehlerterme der Ordnung > 2 bei $h \rightarrow 0$.) Damit haben wir nochmals eine andere Interpretation von II .

DEFINITION

Ein Flächenpunkt $X(w)$, $w \in \Omega$ heißt

$$\begin{array}{llll} \text{elliptisch} & \text{parabolisch} & \text{hyperbolisch,} & \text{falls} \\ K(w) > 0 & K(w) = 0 & K(w) < 0 & \text{ist.} \end{array}$$

Sei z.B. $K(w) > 0$: Dann gilt

$$\kappa_1(w) > 0 \quad \text{und} \quad \kappa_2(w) > 0 \quad (\text{a})$$

oder

$$\kappa_1(w) < 0 \quad \text{und} \quad \kappa_2(w) < 0 \quad (\text{b})$$

nach Definition der Gauß- Krümmung. Im Fall (a) ist II positiv definit, so dass aus der Entwicklung (5) folgt, dass die Fläche lokal bei w in \mathbb{R}_+^3 verläuft. Gilt (b), so ist II negativ definit, also $\delta \leq 0$, d.h. X liegt lokal bei w in \mathbb{R}_-^3 . Anders gesagt: In einem elliptischen Punkt verläuft die Fläche lokal ganz auf einer Seite der affinen Tangentialebene T . Die Punkte einer Sphäre sind alle elliptisch. Ist $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ eine Graphenfläche, so gilt ($K = \det(G^{-1}B)$) s. später)

$$K = \frac{f_{u_1 u_1} f_{u_2 u_2} - (f_{u_1 u_2})^2}{(1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2)^2} .$$

Sei speziell $f(u_1, u_2) := u_1^2 + u_2^2$. Dann ist $K > 0$, also sind auch hier alle Punkte elliptisch. Ist $K(w) < 0$, so ist II_w indefinit, und nach (5) gilt für jede Umgebung U von $X(w)$

$$U \cap \text{Bild } X \cap \mathbb{R}_+^3 \neq \emptyset \neq U \cap \text{Bild } X \cap \mathbb{R}_-^3 .$$

Man zeigt mit obiger Formel, dass für $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_2^2 - u_1^2)$ $X(0, 0)$ ein hyperbolischer Punkt von X ist.

In parabolischen Punkten $K(w) = 0$ sind beide Fälle möglich: die Fläche kann lokal bei $X(w)$ auf einer Seite von T bleiben oder aber die affine Tangentialebene beliebig oft durchschneiden. Der erste Fall tritt ein bei $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^4 + u_2^4)$, der zweite Fall bei $X(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^4 - u_2^4)$ jeweils in $(0, 0)$, denn $\kappa_1(0, 0) = 0 = \kappa_2(0, 0)$.

Auf Flächen gibt es gewisse ausgezeichnete Kurven, denen wir uns jetzt widmen

DEFINITION

Eine glatte Kurve $\gamma := X \circ \omega$ mit $\omega : \mathbb{R} \subset I \rightarrow \Omega, \omega = (\omega_1, \omega_2)$ heißt eine **geodätische**

Kurve auf X (kurz: **Geodätische**), falls ihre geodätische Krümmung κ_g verschwindet. ($\iff n(s) \parallel N(\omega(s))$, da $\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa^2, \kappa_n := \kappa n \cdot N$) γ heißt **Asymptotenlinie**, falls die Normalkrümmung κ_n verschwindet. ($\iff n(s) \perp N(\omega(s))$).

Bemerkungen:

- 1.) Geodätische Kurven sind (lokal) kürzeste Verbindungslinien auf der Fläche (s. später).
- 2.) Es ist

$$\kappa_n = II_\omega(\gamma', \gamma') / I_\omega(\gamma', \gamma'),$$

so dass bei regulärer Parametrisierung ($\gamma' \neq 0$) gilt:

$$\kappa_n \equiv 0 \iff II_\omega(\gamma', \gamma') \equiv 0 \iff (6) \quad \mathcal{L}(\omega)(\omega'_1)^2 + 2\mathcal{M}(\omega)\omega'_1\omega'_2 + \mathcal{N}(\omega)(\omega'_2)^2 \equiv 0$$

Für (6) kann man alternativ schreiben

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} \cdot (\omega'_1, \omega'_2) = 0$$

Sei etwa $K = \kappa_1(\omega) \cdot \kappa_2(\omega) > 0$ auf Ω . Mit der Weingarten-Abbildung $S_\omega : T_\omega X \rightarrow T_\omega X$ ist $II_\omega(\gamma', \gamma') = S_\omega(\gamma') \cdot \gamma'$, so dass im Falle einer γ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= S_\omega(\gamma') \cdot \gamma' = S_\omega(\lambda V_1 + \mu V_2) \cdot (\lambda V_1 + \mu V_2) \\ &= (\kappa_1 \lambda V_1 + \kappa_2 \mu V_2) \cdot (\lambda V_1 + \mu V_2) = \kappa_1 \lambda^2 + \kappa_2 \mu^2, \end{aligned}$$

wobei V_1, V_2 jeweils eine ONB in $T_\omega X$ ist mit $S_\omega V_i = \kappa_i V_i$, und wir $\gamma' = \lambda V_1 + \mu V_2$ geschrieben haben. $K > 0$ heißt aber $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 > 0$ bzw. $\kappa_1 < 0$ und $\kappa_2 < 0$, so dass $\lambda = \mu = 0$ folgen muss im Widerspruch zu $\gamma'(t) \neq 0$. Damit ist gezeigt:

Ist $K > 0$ auf Ω , so hat (6) keine Lösung, es gibt keine Asymptotenlinien auf X .

Umgekehrt überlegt man sich:

Ist $K < 0$ auf Ω , so gibt es zu jedem $w \in \Omega$ genau zwei Asymptotenlinien durch $X(w)$.

DEFINITION

Eine Kurve $\gamma = X \circ \omega$ heißt **Krümmungslinie** auf X , falls jeder Tangentenvektor $\gamma'(t)$ eine **Hauptkrümmungsrichtung** ist, falls also gilt

$$(7) \quad S_{\omega(t)}(\gamma'(t)) = k(t)\gamma'(t)$$

mit $k(t) = \kappa_1(\omega(t))$ oder $k(t) = \kappa_2(\omega_2(t))$.

Schreibt man $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$, so lautet (7)

$$\underbrace{S_{\omega(t)}(DX|_{\omega(t)}(\omega'(t)))}_{=-N_{u_1}(\omega(t))\omega'_1(t) - N_{u_2}(\omega(t))\omega'_2(t)} = k(t) \frac{d}{dt}(X \circ \omega)(t)$$

m.a.W.: Krümmungslinien $X = \gamma \circ \omega$ erfüllen

$$(8) \quad -\frac{d}{dt}(N \circ \omega)(t) = k(t) \frac{d}{dt}(X \circ \omega)(t)$$

Nun kann man links die Weingarten-Gleichung (2) benutzen, also

$$N_{u_\alpha} = -\sum_{\beta=1}^2 b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \quad b_\alpha^\beta := \sum_{\gamma=1}^2 b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta},$$

mit

$$(b_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad (g^{\gamma\beta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}^{-1}$$

als Fundamentalmatrizen von II bzw. I . Damit gilt $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots = \mathcal{E}(\omega), \mathcal{F}(\omega), \mathcal{G}(\omega), \dots)$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(N \circ \omega) &= -DN_\omega(\omega') = -N_{u_1}(\omega)\omega'_1 - N_{u_2}(\omega)\omega'_2 \\ &= \omega'_1 \sum_{\beta=1}^2 b_1^\beta X_{u_\beta}(\omega) + \omega'_2 \sum_{\beta=1}^2 b_2^\beta X_{u_\beta}(\omega) \\ &= (\omega'_1 b_1^1 + \omega'_2 b_2^1) X_{u_1}(\omega) + (\omega'_1 b_1^2 + \omega'_2 b_2^2) X_{u_2}(\omega), \end{aligned}$$

während man auf der rechten Seite von (8)

$$k\omega'_1 X_{u_1}(\omega) + k\omega'_2 X_{u_2}(\omega)$$

bekommt. Vergleich ergibt:

$$\begin{aligned} b_1^1 \omega'_1 + b_2^1 \omega'_2 &= k\omega'_1, \\ b_1^2 \omega'_1 + b_2^2 \omega'_2 &= k\omega'_2. \end{aligned}$$

Nun multipliziert man Zeile 1 mit ω'_2 , Zeile 2 mit $-\omega'_1$ und addiert die Ergebnisse. Es folgt

$$-b_1^2(\omega'_1)^2 - b_2^2\omega'_1\omega'_2 + b_1^1\omega'_1\omega'_2 + b_2^1(\omega'_2)^2 \equiv 0.$$

Nun setzt man die Werte für b_α^β ein und multipliziert mit $-W^2 = \mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}$:

$$(\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L})(\omega'_1)^2 + (\mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{L})\omega'_1\omega'_2 + (\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M})(\omega'_2)^2 \equiv 0$$

oder

$$\det \begin{pmatrix} (\omega'_2)^2 & -\omega'_1\omega'_2 & (\omega'_1)^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Beispiele:

- 1.) Berechnung von Gauß' scher und mittlerer Krümmung für Graphen $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$: Hier ist

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix},$$

so dass

$$K = \det(G^{-1}B) = \frac{1}{\det G} \det B = \frac{1}{1 + f_u^2 + f_v^2} \det B = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}.$$

Entsprechend folgt aus

$$G^{-1}B = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}^3} \begin{pmatrix} 1 + f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1 + f_u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}:$$

$$H = \frac{1}{2} \text{Spur}(G^{-1}B) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}^3} [(1 + f_v^2)f_{uu} - f_u f_v f_{uv} \cdot 2 + (1 + f_u^2)f_{vv}] \cdot \frac{1}{2}.$$

Flächen mit $H \equiv 0$ heißen **Minimalflächen**. Die Graphenfläche ist also genau dann eine Minimalfläche, wenn f die Minimalflächengleichung (MFG)

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_{uv}f_u f_v + (1 + f_u^2)f_{vv} \equiv 0$$

erfüllt. Das ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für f , die auch durch

$$\text{div} \left(\nabla f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right) \equiv 0$$

ersetzt werden kann.

- 2.) H und K für Rotationsflächen $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$:
Es ist $\mathcal{E} = f^2, \mathcal{F} = 0, \mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2, \mathcal{L} = -fg'/\sqrt{\mathcal{G}}, \mathcal{M} = 0, \mathcal{N} = (f''g' - g''f')/\sqrt{\mathcal{G}}$, wobei man

$$N(u, v) = (X_u \times X_v) / |X_u \times X_v| = (g' \cos u, g' \sin u, -f') / \sqrt{\mathcal{G}}$$

benutzt zur Berechnung von $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 G^{-1}B &= \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{f^2\mathcal{G}} \begin{pmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{fg'}{\sqrt{\mathcal{G}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}(f''g' - g''f') \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow & K = \underbrace{\frac{1}{f^4\mathcal{G}^2} f^2((f')^2 + (g')^2)}_{=\det G^{-1}} \left[-\frac{fg'}{\mathcal{G}} \right] (f''g' - g''f') \\
 &= -\frac{1}{f\mathcal{G}^2} g'(f''g' - f'g'') \\
 \Rightarrow & \boxed{K = \frac{1}{\mathcal{G}^2} \left[-\frac{g'(f''g' - f'g'')}{f} \right], \quad \mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2}
 \end{aligned}$$

Entsprechend liefert $\frac{1}{2}$ Spur $(G^{-1}B)$ die mittlere Krümmung:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \frac{1}{f^2\mathcal{G}} \left[-\frac{fg'}{\sqrt{\mathcal{G}}}((f')^2 + (g')^2) + f^2 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}(f''g' - f'g'') \right] \\
 \Rightarrow & \boxed{H = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[-\frac{g'}{f} + \frac{f''g' - f'g''}{\mathcal{G}} \right]}
 \end{aligned}$$

Ist die Kurve $v \mapsto (f(v), g(v))$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt: $f'(v)^2 + g'(v)^2 = \mathcal{G}(v) \equiv 1$. Es folgt: $f'f'' = -g'g''$, also in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \frac{-g' + f(f''g' - f'g'')}{f}, \\
 K &= -\frac{g'}{f}(f''g' - f'g'') = -\frac{1}{f}(f''(g')^2 - f'g'g'') \\
 &= -\frac{1}{f}(f''(g')^2 + f''(f')^2) = -\frac{f''}{f}.
 \end{aligned}$$

Gilt für eine Fläche X $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$, so ist

$$G^{-1}B = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}/\mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{N}/\mathcal{G} \end{pmatrix},$$

d.h. die beiden Hauptkrümmungen sind

$$\boxed{\mathcal{L}/\mathcal{E} \text{ und } \mathcal{N}/\mathcal{G}}$$

Für eine Rotationsfläche mit $(f')^2 + (g')^2 = 1$ heißt das:

$$\{\kappa_1, \kappa_2\} = \{-g'/f, f''g' - g''f'\}.$$

Eine weitere Konsequenz von $\mathcal{F} = \mathcal{M} = 0$ bei Rotationsflächen ist, dass

$$\begin{aligned} u &\mapsto X(u, v), & v &\text{ fest,} \\ v &\mapsto X(u, v), & u &\text{ fest,} \end{aligned}$$

Kümmungslinien sind: Sei etwa $v = v_0$ fest, $\omega(u) := (u, v_0)$. Dann haben wir die Koordinatenkurve $\gamma(u) := (X \circ \omega)(u)$, und diese ist Krümmungslinie, falls

$$\det \begin{pmatrix} (\omega'_2)^2 & -\omega'_1 \omega'_2 & (\omega'_1)^2 \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = 0$$

ist. Hier hat die Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{E} & 0 & \mathcal{G} \\ \mathcal{L} & 0 & \mathcal{N} \end{pmatrix},$$

so dass $\det(\dots) = 0$ klar ist. Für die andere Koordinatenlinie gilt dasselbe Argument.

3.) Zwei klassische Minimalflächen

- 4.) **Das Katenoid** (Kettenfläche) entspricht als Rotationsfläche $X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$, wenn man die Kurve $y = \cosh z$ um die z -Achse rotiert.

Hier ist es also so, dass man Punkte $(0, \cosh v, v)$ betrachtet und diese um die z -Achse dreht. Mit der üblichen Notation ist $f(v) = \cosh v, g(v) = v$ die Formeln aus Beispiel 2.) ergeben.

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[-\frac{g'}{f} + \frac{f''g' - g''f'}{\mathcal{G}} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[-\frac{1}{\cosh v} + \frac{\cosh v}{\mathcal{G}} \right],$$

$$\mathcal{G} = X_v \cdot X_v = |(\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)|^2 = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v,$$

also $H = \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh v} \left[-\frac{1}{\cosh v} + \frac{1}{\cosh v} \right] \equiv 0$, das Katenoid ist per Definition eine Minimalfläche. Für die Hauptkrümmung findet man

$$\kappa_1 = -1/\cosh^2 v = -\kappa_2,$$

die Gauß-Krümmung errechnet sich daraus zu $K = -(\cosh v)^{-4}$.

- B.) **Das Helikoid** (= Schraubenfläche, Wendelfläche) entsteht, wenn man die Helix $(\cos u, \sin u, u)$ nimmt und durch jeden Punkt auf der Helix eine Gerade parallel zur xy -Ebene zieht, die die z -Achse schneidet. Das Helikoid wird durch diese Geraden erzeugt, eine Parametrisierung ist $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ mit $X_u = (-v \sin u, v \cos u, 1)$, $X_v = (\cos u, \sin u, 0)$, $N = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(-\sin u, \cos u, -v)$. Daraus folgt $H \equiv 0$.

§ 4 Spezielle Klassen von Flächen

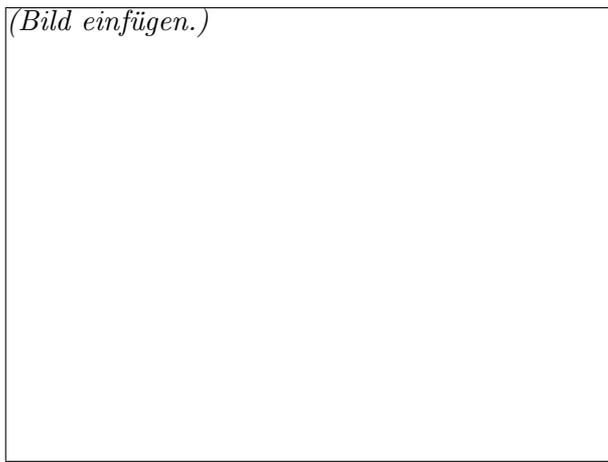
I.) Regelflächen (ruled surfaces)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve. Seien weiter ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ gegeben und eine glatte Abbildung $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Dann ist

$$J \ni u \mapsto \alpha(t) + uw(t)$$

bei festem t die Parametrisierung des Teiles einer Geraden, die im Fall $u = 0 \in J$ durch den Kurvenpunkt $\alpha(t)$ geht mit Richtung $w(t)$.

(Bild einfügen.)



Setzt man

$$(1) \quad X(t, u) := \alpha(t) + uw(t), \quad t \in I, \quad u \in J,$$

so hat man die Vorstellung, dass X diejenige Fläche beschreibt, die durch Vereinigung all dieser Geradenstücke entsteht.

DEFINITION:

Eine **reguläre** Fläche, die durch eine Parametrisierung der Form (1) entsteht, heißt **Regelfläche**.

Es gilt $X_t(t, u) = \alpha'(t) + uw'(t)$, $X_u(t, u) = w(t)$, und bei einer regulären Fläche müssen daher $\alpha'(t) + uw'(t), w(t)$ für alle $(t, u) \in I \times J$ linear unabhängig sein. Wir wollen aber nachfolgend diese Bedingung nicht immer stellen, sondern die beschreibende Gleichung (1) einfach als Definition nehmen.

Beispiel 1 (Tangentenfläche):

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Man setzt $J = (0, \infty)$ oder $=(-\infty, 0)$ sowie

$$X^\pm(t, u) := \alpha(t) + u\alpha'(t), \quad t \in I, \quad u \in J$$

Hier ist also $w(t) = \alpha'(t)$ gewählt. Es gilt $X_t^\pm(t, u) = \alpha'(t) + u\alpha''(t)$, $X_u^\pm(t, u) = \alpha'(t)$, also

$$X_t^\pm \times X_u^\pm = u\alpha''(t) \times \alpha'(t).$$

Wir haben für die Krümmung von α gezeigt:

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Setzt man also $\kappa_\alpha > 0$ auf I voraus, so folgt, dass die Tangentenflächen zumindest lokal reguläre Flächen gemäß unserer Definition sind. (Beachte: $u = 0 \in J$!)

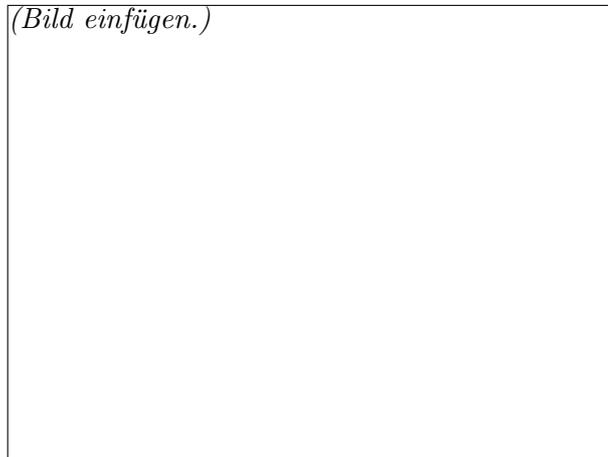
Beispiel 2 (Helikoid):

Das Helikoid kann als Regelfläche $X(t, u) = \alpha(t) + uw(t)$ geschrieben werden mit $\alpha(t) = (0, t, 0)$, $w(t) = (1, 0, \tan t)$. Im übrigen ist das Helikoid die einzige - nicht ebene - Regelfläche, die auch Minimalfläche ist.

Beispiel 3 (Verallgemeinerter Zylinder über einer Kurve):

Sei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine (geschlossene) ebene Kurve ohne Selbstdurchschneidungen, o.E. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$, und $w \equiv (0, 0, 1)$.

(Bild einfügen.)



Dann heißt

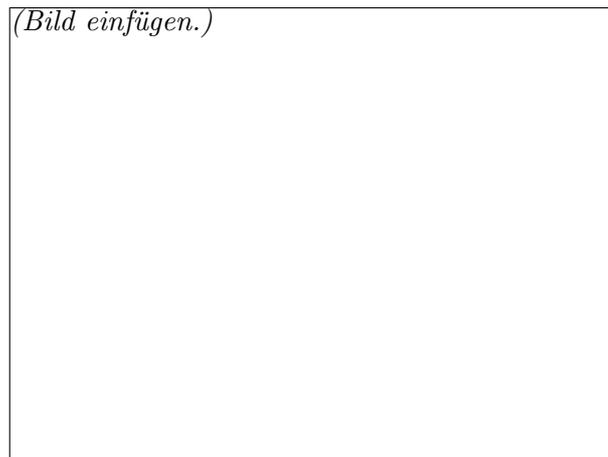
$$X(t, u) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), u)$$

der verallgemeinerte Zylinder über α .

Beispiel 4:

Sei $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ wie 3.) und $P \in \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ ein fixierter Punkt. Mit $w(t) := p - \alpha(t)$ sei $X : I \times (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$

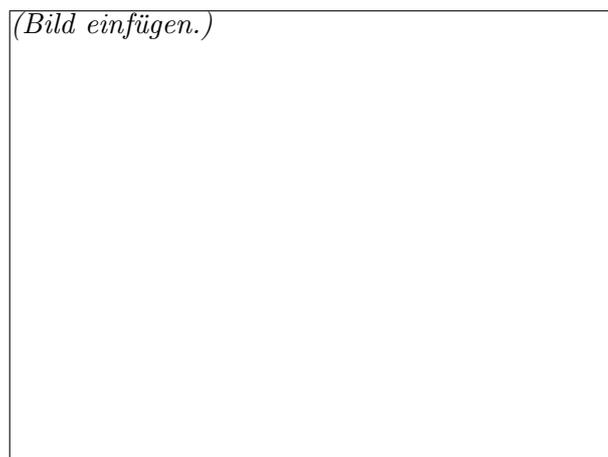
$$\begin{aligned} X(t, u) &= (1 - u)\alpha(t) + uP \\ &= \alpha(t) + uw(t). \end{aligned}$$



Für $u = 0$ ist $X(t, 0)$ gerade ein Punkt auf α , für $u = 1$ münden die Strecken in P . Man nennt X den verallgemeinerten Kegel über α mit Spitze in P .

Beispiel 5:

Auch das **Rotationshyperboloid** $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\}$ ist eine Regelfläche: Wählt man



$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ (1-Kreislinie in der (x, y) -Ebene) und $w(t) = (\alpha'(t), 1) = (\sin t, \cos t, 1)$, so ist $X(t, u) = \alpha(t) + uw(t)$ eine Darstellung von S : Aus $X(t, u) = (\underbrace{\cos t - u \sin t}_{=:x}, \underbrace{\sin t + u \cos t}_{=:y}, u)$ folgt ja $x^2 + y^2 = (\cos t - u \sin t)^2 + (\sin t + u \cos t)^2 = \cos^2 t + u^2 \sin^2 t + \sin^2 t + u^2 \cos^2 t = 1 + u^2$.

Man hat:

X Regelfläche \implies Gauß-Krümmung $K \leq 0$

Beweis: Sei $X(t, u) = \alpha(t) + uw(t)$. Dann ist $X_{uu} \equiv 0$ und somit $\mathcal{N} \equiv 0$ (beachte: wir bezeichnen die Variablen hier mit (t, u) u hat also die Rolle des früheren $v!$), aus $K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$ wird $K = -\mathcal{M}^2/(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)$, und $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 > 0$ (wir nehmen an, dass X regulär ist) ergibt $K \leq 0$. \square

II.) Minimalflächen

waren nach unserer Definition Flächen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Eigenschaften H (= mittlere Krümmung) $\equiv 0$. Dies lässt zunächst keinerlei Minimalität von X erkennen. Um einen anderen Blickwinkel zu bekommen, betrachten wir irgendeine Fläche $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, fixieren eine (kleine) offene Menge U mit $\bar{U} \subset \Omega$ und betrachten $\eta : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig, allerdings $\eta \equiv 0$ nach ∂U . Man setzt für $t \in \mathbb{R}, |t| \ll 1$

$$\begin{aligned}\Phi(u, v, t) &:= X(u, v) + t\eta(u, v)N(u, v), \\ X^t : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3, X^t(u, v) := \Phi(u, v, t),\end{aligned}$$

d.h.: Außerhalb von U stimmen alle Flächen mit X überein, es gilt $X^0 = X$, und innerhalb von U wird die Fläche X in normaler Richtung variiert. Unser Ziel ist die Berechnung von $\frac{d}{dt}\bigg|_0 A_\Omega(X^t)$, $A_\Omega(X^t)$ = Flächeninhalt von X^t , in geometrischen Größen von X . Ist nämlich dann X eine "Minimalfläche", also eine Fläche, die unter allen Flächen $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit festem Rand den Inhalt minimiert, so muss $0 = \frac{d}{dt}\bigg|_0 A_\Omega(X_t)$ sein mit der Konsequenz, dass die zu bestimmenden geometrischen Größen von X verschwinden. Hierbei wird es sich um die mittlere Krümmung H handeln. Es gilt (mit der üblichen Symbolik für partielle Ableitungen)

$$\begin{aligned}X_u^t &= X_u + t\eta N_u + t\eta_u N, \\ X_v^t &= X_v + t\eta N_v + t\eta_v N,\end{aligned}$$

und man bekommt für die Koeffizienten der Fundamentalmatrix von I (wegen $X_u \cdot N = 0 = N_u \cdot N$, etc.)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^t &:= X_u^t \cdot X_u^t = \mathcal{E} + 2t\eta X_u \cdot N_u + t^2\eta^2|N_u|^2 + t^2(\eta_u)^2, \\ \mathcal{F}^t &:= X_u^t \cdot X_v^t = \mathcal{F} + t\eta(X_u \cdot N_v + X_v \cdot N_u) + t^2(\eta^2 N_u \cdot N_v + \eta_u \eta_v), \\ \mathcal{G}^t &:= X_v^t \cdot X_v^t = \mathcal{G} + 2t\eta X_v \cdot N_v + t^2\eta^2|N_v|^2 + t^2(\eta_v)^2,\end{aligned}$$

so dass

$$\mathcal{E}^t \mathcal{G}^t - (\mathcal{F}^t)^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 + t(2\eta\mathcal{E}X_v \cdot N_v + 2\eta\mathcal{G}X_u \cdot N_u - \mathcal{F}\eta^2[X_u \cdot N_v + X_v \cdot N_u]) + tR(u, v, t)$$

mit $\lim_{t \rightarrow 0} R(u, v, t) = 0$. Per Definition ist

$$X_u \cdot N_u = -\mathcal{L}, \quad X_u \cdot N_u = X_v \cdot N_u = -\mathcal{M}, \quad X_v \cdot N_v = -\mathcal{N}$$

also $\mathcal{E}^t \mathcal{G}^t - (\mathcal{F}^t)^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 - 2t\eta[\mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}] + tR(t, u, v)$.

Für den Flächeninhalt von X^t gilt

$$\begin{aligned}A_\Omega(X^t) &= \int_\Omega |X_u^t \times X_v^t| dudv = \int_\Omega \sqrt{\mathcal{E}^t \cdot \mathcal{G}^t - (\mathcal{F}^t)^2} dudv \\ \implies \frac{d}{dt}\bigg|_0 A_\Omega(X^t) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} (-2)\eta[\mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}] dudv \\ &= -2 \int_\Omega \eta \frac{1}{2} \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} [\mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}] \cdot \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} dudv \\ &= -2 \int_U \eta H \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} dudv.\end{aligned}$$

Ist also $H \equiv 0$, so folgt $A'_\Omega(0) = 0$ für alle U offen in Ω mit $\bar{U} \subset \Omega$ und alle normalen Variationen. Umgekehrt: Ist X tatsächlich lokal flächenminimal, so ist $A_\Omega(0) \leq A_\Omega(t)$, also $A'_\Omega(0) = 0$, so dass nach obiger Rechnung

$$\int_U \eta H \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \, dudv \equiv 0$$

für alle U wie oben und alle η mit Träger in U . Dann ist aber $H\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \equiv 0$, also $H \equiv 0$ wegen $\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} > 0$.

Minimalflächen (“ $H \equiv 0$ ”) sind nach dieser Überlegung genau die kritischen Punkte des Flächenfunktionals bzgl. normaler Variationen. Bekanntlich sind kritische Punkte nicht notwendig (lokale) Extrema, hier gilt jedoch:

Erfüllt die Fläche $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Forderung $H \equiv 0$, so ist X lokal flächenminimal.

Zum Schluss betrachten wir noch eine besondere Form der Parametrisierung von Flächen, die für Minimalflächen einer sehr einfachen Differentialgleichung genügt:

DEFINITION

Eine Fläche $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **konform** oder **isotherm parametrisiert**, falls gilt:

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v,$$

d.h. falls $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ und $\mathcal{F} = 0$.

Bemerkung:

Die Fundamentalmatrix von I ist an jeder Stelle (u, v) ein Vielfaches der Einheitsmatrix. X_u und X_v sind senkrecht zueinander mit Länge 1. (u, v) heißen isotherme Parameter.

SATZ:

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ **isotherm parametrisiert**. Dann gilt: $\Delta X := X_{uu} + X_{vv} = 2HX_u \wedge X_v$. Insbesondere hat man: X Minimalfläche ($H \equiv 0$) $\iff \Delta X \equiv 0$.

Beweis:

Aus $X_u \cdot X_u - X_v \cdot X_v = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= (X_u \cdot X_u - X_v \cdot X_v)_u = 2(X_{uu} \cdot X_u - X_{uv} \cdot X_v) \\ &= 2(X_{uu} \cdot X_u - \underbrace{(X_u \cdot X_v)}_{=0})_v + X_u \cdot X_{vv} = 2\Delta X \cdot X_u, \\ 0 &= (X_v \cdot X_v - X_u \cdot X_u)_v = \dots = 2\Delta X \cdot X_v, \end{aligned}$$

so dass $\Delta X = \lambda X_u \times X_v$ mit $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt $\Delta X \cdot (X_u \times X_v) = (X_{uu} + X_{vv}) \cdot N |X_u \times X_v| = (\mathcal{L} + \mathcal{N}) |X_u \times X_v|$, so dass $\lambda = (\mathcal{L} + \mathcal{N}) |X_u \times X_v|^{-1} = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}$. Hier

ist nun $H = \frac{\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{M}\mathcal{F}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)} \stackrel{(\mathcal{E}=\mathcal{G}, \mathcal{F}=0)}{=} \frac{\mathcal{E}(\mathcal{M} + \mathcal{N})}{2\mathcal{E}^2} = \frac{\mathcal{M} + \mathcal{N}}{2\mathcal{N}}$ also $\lambda = 2H$. □

Kapitel 3

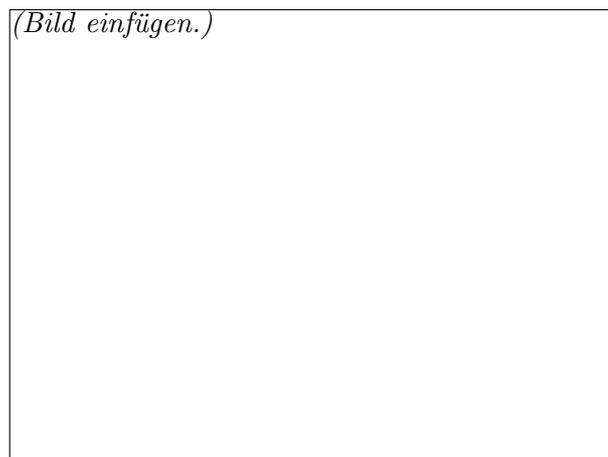
Die innere Geometrie von Flächen

§ 1 Einführung

Bisher haben wir Flächen in \mathbb{R}^3 betrachtet, die durch **eine** Parametrisierung $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben sind und alle geometrischen Begriffe über diese Parametrisierung definiert. Ab jetzt werden wir unter einer Fläche eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 verstehen, die man zumindest lokal parametrisieren kann, und wir wollen uns mit der inneren Geometrie solcher Flächen beschäftigen. Das sind Eigenschaften, die unabhängig sind von einer speziell gewählten lokalen Parameterdarstellung.

DEFINITION 1

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt eine **reguläre (eingebettete) Fläche**, wenn für alle Punkte $p \in S$ gilt: Zu p gibt es eine Umgebung V in \mathbb{R}^3 , eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine **Bijektion** $X : U \rightarrow S \cap V$ mit den folgenden Eigenschaften:



- i) X ist glatt ($= C^\infty$) als Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

- ii) X_u und X_v sind für alle $(u, v) \in U$ linear unabhängig.
- iii) $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ ist stetig ($\iff \exists W \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig, so dass $V \cap S \subset W$ und $F|_{V \cap S} = X^{-1}$)

Bemerkungen:

- 1.) Die Bezeichnung “eingebettet” bezieht sich darauf, dass S (“die Fläche”) direkt als Teilmenge des umgebenden Raumes \mathbb{R}^3 definiert wird. Es gibt eine abstraktere Definition für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Bezugnahme auf einen umgebenden Euklidischen Raum.
- 2.) **Tangentialebene:** Sei $p \in S$ und X eine **lokale Parametrisierung** von S bei p wie in Definition 1.

$$T_p S := \text{Tangentialebene von } S \text{ in } p := DX|_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

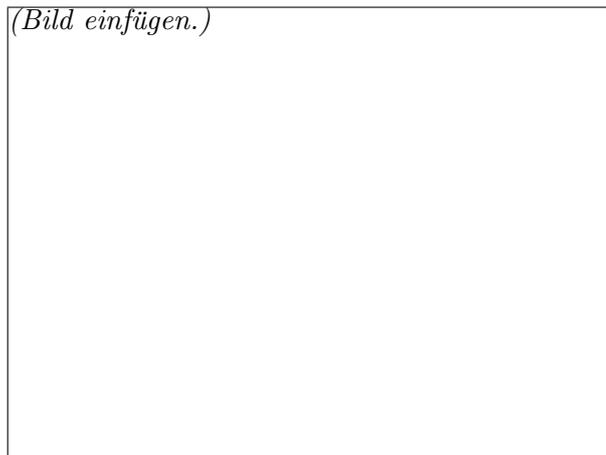
Die Definition hängt scheinbar von der Wahl der lokalen Parametrisierung von S bei p ab, wie früher gilt jedoch:

$$T_p S = \{ \alpha'(0) : \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, I \text{ Intervall um } 0, \alpha(0) = p, \alpha(I) \subset S \},$$

und die Menge rechts ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung von S bei p .

Seien S, S' zwei reguläre Flächen, $\varphi : S \rightarrow S'$.

(Bild einfügen.)



DEFINITION 2

- a) $\varphi : S \rightarrow S'$ heißt **differenzierbar (glatt)**, falls es zu jedem $p \in S$ eine Parametrisierung X von S bei p und eine Parametrisierung Y von S' nahe $\varphi(p)$ gibt, so dass $Y^{-1} \circ \varphi \circ X$ im üblichen Sinn glatt ist.
- b) Ein **Diffeomorphismus** $\varphi : S \rightarrow S'$ ist eine glatte **Bijektion**, deren Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : S' \rightarrow S$ ebenfalls glatt ist.
- c) Ein Diffeomorphismus $\varphi : S \rightarrow S'$ heißt eine **Isometrie**, wenn für alle $p \in S$, $w, \tilde{w} \in T_p S$ gilt:

$$d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w}) = w \cdot \tilde{w}$$

Man nennt S und S' dann zueinander isometrisch.

Bemerkungen:

- 1.) In c) bedeutet $d\varphi_p : T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} S'$ das Differential von φ in p , das bei einer Isometrie per Definition "das Skalarprodukt erhält". Wie erklärt man in vernünftiger Weise das Differential $d\varphi_p$ als lineare Abbildung $T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} S'$? Sei $w \in T_p(S)$. Wähle eine Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$. Dann ist $\tilde{\alpha} := \varphi \circ \alpha$ Kurve in S' mit $\tilde{\alpha}(0) = \varphi(p)$. Man setzt:

$$d\varphi_p(w) := \tilde{\alpha}'(0).$$

Die folgende formale Definition von $d\varphi_p$ leistet dasselbe:

(Bild einfügen.)

Das Differential $D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X)|_w$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w := X^{-1}(p)$, und man bekommt daraus die gewünschte lineare Abbildung $T_p S \rightarrow T_{\varphi(p)} S'$ durch Bildung von $(\bar{w} := Y^{-1}(\varphi(p)))$

$$DY|_{\bar{w}} \circ D(Y^{-1} \circ \varphi \circ X)|_w \circ (DX|_w)^{-1}$$

2.) Ist S eine Fläche und $p \in S$, so ist per früherer Definition die Erste Fundamentalform I_p

die Einschränkung von “.” auf $T_p S$. $\varphi : S \rightarrow S'$ ist also genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$\forall w, \tilde{w} \in T_p S : I_{\varphi(p)}^{S'}(d\varphi_p(w), d\varphi_p(\tilde{w})) = I_p^S(w, \tilde{w})$. Ein Diffeomorphismus φ ist also genau dann eine Isometrie $S \rightarrow S'$, wenn das Differential $d\varphi_p$ überall die Erste Fundamentalform erhält.

3.) Man nennt eine glatte Abbildung $\varphi : S \rightarrow S'$ eine **lokale Isometrie**, wenn jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung U in \mathbb{R}^3 hat, so dass $\varphi|_{U \cap S}$ eine Isometrie $U \cap S \rightarrow \varphi(U \cap S) \subset S'$ ist.

Beispiel:

Sei $S := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Z ist also der Zylinder über der Einheitskreislinie. Man setzt $\varphi : S \rightarrow Z$, $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Offensichtlich ist φ glatt, aber natürlich **nicht** global injektiv, allerdings handelt es sich um eine lokale Isometrie. Es gilt nämlich:

$$d\varphi|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und man hat für $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 (= T_{(u,v)} S)$:

$$d\varphi|_{(u,v)}(w) \cdot d\varphi|_{(u,v)}(w) = \left| \begin{pmatrix} -w_1 \cdot \sin u \\ w_1 \cdot \cos u \\ w_2 \end{pmatrix} \right| = |w|^2.$$

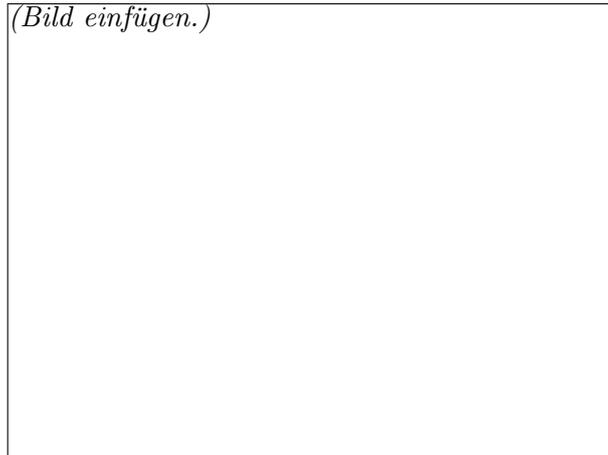
Folglich gilt

$$(*) \quad d\varphi|_{(u,v)}(w) \cdot d\varphi|_{(u,v)}(\tilde{w}) = w \cdot \tilde{w}$$

zumindest für $w = \tilde{w} \in T_{(u,v)} S$, aber das ist gleichwertig mit (*) für alle $w, \tilde{w} \in T_{(u,v)} S$. Umgekehrt ist Z auch lokal isometrisch zur Ebene: Man rollt Z auf der Ebene ab.

Aus topologischen Gründen sind S und Z nicht isometrisch zueinander. In der Ebene S kann offenbar jede geschlossene Kurve stetig über eine Schar geschlossener Kurven in einen Punkt deformiert werden (“die Ebene ist einfach zusammenhängend”), für geschlossene Kurven in Z ist dies i.a. nur dann möglich, wenn man dabei Z verlässt. Mithin kann es nicht einmal einen Homeomorphismus $S \rightarrow Z$ geben.

(Bild einfügen.)



Sind bei lokaler Parametrisierung über derselben Grundmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ die Koeffizienten von I für zwei Flächen gleich, so sind diese lokal isometrisch, genauer:

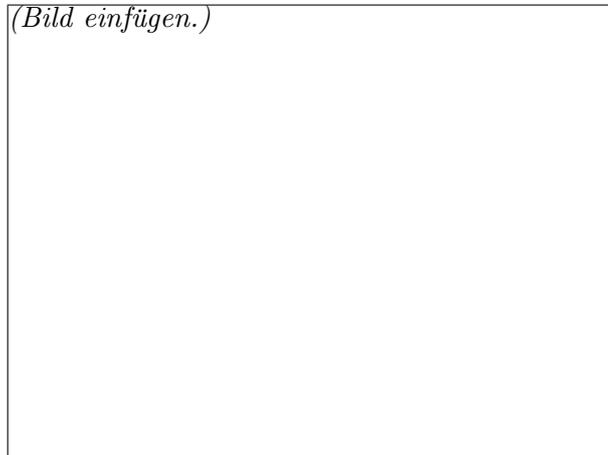
SATZ 1

Seien S_1, S_2 zwei reguläre Flächen. Angenommen, $X_1 : U \rightarrow S_1, X_2 : U \rightarrow S_2$ sind lokale Parametrisierungen über derselben Grundmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 \text{ auf } U.$$

Dann ist $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(U) \rightarrow S_2$ eine lokale **Isometrie**:

(Bild einfügen.)



Beweis:

Sei $p \in X_1(U), w \in T_p S_1$. Dazu wähle man eine Kurve $\alpha(t) = (u(t), v(t)) \in U$ mit $X_1(\alpha(0)) = p, w = \frac{d}{dt}|_0 (X_1 \circ \alpha)(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\varphi_p(w) &:= \frac{d}{dt}|_0 \varphi \circ (X_1 \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}|_0 [(X_2 \circ X_1^{-1}) \circ (X_1 \circ \alpha)](t) \\ &= \frac{d}{dt}|_0 (X_2 \circ \alpha)(t) = u'(0)(X_2)_u(\alpha(0)) + v'(0)(X_2)_v(\alpha(0)) \end{aligned}$$

und man bekommt

$$\begin{aligned} d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w) &= (u'(0))^2 (X_2)_u(\alpha(0)) \cdot (X_2)_u(\alpha(0)) \\ &+ 2u'v'(0) (X_2)_u(\alpha(0)) \cdot (X_2)_v(\alpha(0)) \\ &+ (v'(0))^2 (X_2)_v(\alpha(0)) \cdot (X_2)_v(\alpha(0)) \\ &\stackrel{\text{vor.}}{=} (u'(0))^2 \mathcal{E}_1(\alpha(0)) + 2u'(0)v'(0) \mathcal{F}_1(\alpha(0)) + (v'(0))^2 \mathcal{G}_1(\alpha(0)). \end{aligned}$$

Zugleich ist offenbar ($w = \frac{d}{dt}|_0 X_1(\alpha(t)) = u'(0)(X_1)_u(\alpha(0)) + v'(0)(X_1)_v(\alpha(0))$) und damit

$$\begin{aligned} w \cdot w &= \frac{d}{dt}|_0 X_1(\alpha(t)) \cdot \frac{d}{dt}|_0 X_1(\alpha(t)) \\ &= (u'(0))^2 (X_1)_u(\alpha(0)) \cdot (X_1)_u(\alpha(0)) + 2u'(0)v'(0) (X_1)_u(\alpha(0)) \cdot (X_1)_v(\alpha(0)) \\ &\quad + (v'(0))^2 (X_1)_v(\alpha(0)) \cdot (X_1)_v(\alpha(0)) \\ &= (u'(0))^2 \mathcal{E}_1(\alpha(0)) + 2u'(0)v'(0) \mathcal{F}_1(\alpha(0)) + (v'(0))^2 \mathcal{G}_1(\alpha(0)), \end{aligned}$$

also $d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w) = w \cdot w$. □

Als Anwendung von Satz 1 folgt

Katenoid und Helikoid sind lokal isometrisch.

Dazu beachtet man: $X^K(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ ist eine Parametrisierung des Katenoids, und für Rotationsflächen $X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ gilt allgemein

$$\mathcal{E} = f^2, \mathcal{F} = 0, \mathcal{G} = (f')^2 + (g')^2,$$

so dass

$$(1) \quad \mathcal{E}^K = \cosh^2 v, \mathcal{F}^K \equiv 0, \mathcal{G}^K = 1 + \sinh^2 v.$$

Das Helikoid war ursprünglich parametrisiert durch $Y(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$, mit der Ersetzung $v \leftrightarrow \sinh v$ ergibt sich $X^H(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u)$, und man rechnet nach

$$X_u^H = (-\sinh v \sin u, \sinh v \cos u, 1), X_v^H = \dots \implies$$

$$\mathcal{E}^H = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v, \mathcal{F}^H = X_u^H \cdot X_v^H = 0,$$

$$(2) \mathcal{G}^H = \cosh^2 v ,$$

so dass aus (1), (2) mit Satz 1 die lokale Isometrie beider Flächen folgt. \square

Ist S eine Fläche in \mathbb{R}^3 , so ist für $p, q \in S$ die Zahl $|p - q|$ (= Euklidischer Abstand in \mathbb{R}^3) **nicht** die Größe, die den Abstand von p und q auf S , also den sogenannten inneren Abstand misst.

DEFINITION 3

Für $p, q \in S$ sei $d(p, q) := \inf\{L(c) : c \text{ Kurve in } S \text{ von } p \text{ nach } q\}$. $d(p, q)$ heißt **innerer Abstand** von p zu q in S . Hierbei werden nur **zusammenhängende Flächen** S betrachtet, d.h. zu $p, q \in S$ gibt es mindestens eine Kurve c , die in p startet, ganz in S verläuft, um in q zu enden.

SATZ 2

$d : S \times S \rightarrow [0, \infty)$ macht S zu einem **metrischen Raum**.

Beweis:

i) $d \geq 0$ klar; es ist $d(p, p) = 0$, denn $c(t) \equiv p$ verbindet p mit sich selbst.

ii) Sei $d(p, q) = 0$. Wegen

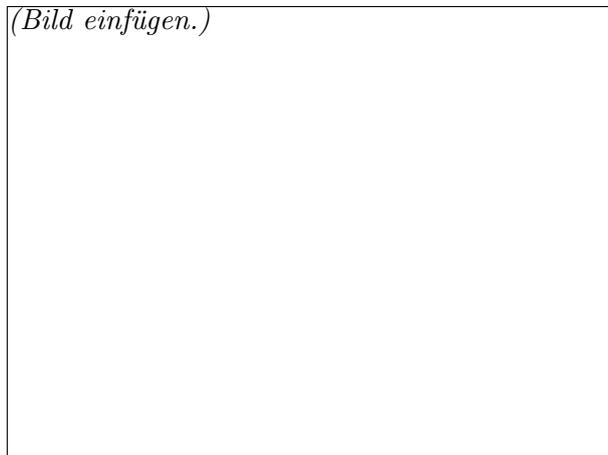
$$|p - q| \leq d(p, q)$$

ist dann $p = q$.

iii) Die Symmetrie $d(p, q) = d(q, p)$ ergibt sich, da man zur Berechnung von $d(q, p)$ alle Kurven von p nach q rückwärts durchlaufen kann.

iv) Zu zeigen ist $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ für beliebige Punkte $p, q, r \in S$.

(Bild einfügen.)



Zu $\varepsilon > 0$ wähle man Kurven c_1 von p nach r bzw. c_2 von r nach

q mit $L(c_1) \leq d(p, r) + \varepsilon$, $L(c_2) \leq d(r, q) + \varepsilon$. Der zusammengesetzte Weg $c_1 c_2$ führt von p nach q , so dass

$$d(p, q) \leq L(c_1 c_2) = L(c_1) + L(c_2) \leq 2\varepsilon + d(p, r) + d(r, q),$$

wegen der Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung. \square

SATZ 3

Seien S, S' reguläre Flächen, $\varphi : S \rightarrow S'$ sei ein Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$\varphi \text{ ist eine Isometrie} \iff (*) \quad L^S(c) = L^{S'}(\varphi \circ c) \quad \forall c = \text{Kurve in } S$$

Bemerkung:

(*) sagt aus, dass φ die Kurve c in S in die Kurve $\varphi \circ c$ mit gleicher Länge abbildet.

Beweis:

“ \Rightarrow ”: Sei φ eine Isometrie $S \rightarrow S'$ und $c : [a, b] \rightarrow S$ eine Kurve. Dann gilt

$$\begin{aligned} L^{S'}(\varphi \circ c) &= \int_a^b \left| \frac{d}{dt}(\varphi \circ c) \right| dt = \int_a^b (d\varphi_c(c'(t)) \cdot d\varphi_c(c'(t)))^{1/2} dt \\ &= \int_a^b (c'(t) \cdot c'(t))^{1/2} dt = L^S(c). \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ”: Sei die Bedingung (*) aus Satz 3 erfüllt. Angenommen es gibt $p \in S$ und $w \in T_p S - \{0\}$ mit

$$w \cdot w < d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(w).$$

(den Fall “ $>$ ” führt man entsprechend zum Widerspruch!)

Sei $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$ eine Kurve mit $c(0) = p, c'(0) = w$ und somit

$$(**) \quad |c'(0)|^2 < |(\varphi \circ c)'(0)|^2.$$

Für $\varepsilon \ll 1$ kann man annehmen, dass (**) nicht nur für $t = 0$ sondern für alle $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ richtig ist. (Das ist ein Stetigkeitsargument, denn $t \mapsto |c'(t)|^2, t \mapsto |(\varphi \circ c)'(t)|^2$ sind stetig.) Es folgt

$$L^S(c) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |c'(t)| dt < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |(\varphi \circ c)'(t)| dt = L^{S'}(\varphi \circ c),$$

Widerspruch! \square

Korollar

Sind S und S' zusammenhängende Flächen und $\varphi : S \rightarrow S'$ eine **Isometrie**, so gilt $d^S(p, q) = d^{S'}(\varphi(p), \varphi(q))$ für alle $p, q \in S$.

§ 2 Konforme Abbildungen

Der Begriff der **Isometrie von Flächen** ist eine natürliche Äquivalenz hinsichtlich der metrischen Eigenschaften von Flächen, man denke etwa an die inneren Längenmessung. Eine abgeschwächte Version der Äquivalenz von Flächen unter Isometrien ist die sogenannte konforme Äquivalenz.

DEFINITION 4

Seien S, S' reguläre Flächen. Ein Diffeomorphismus $\varphi : S \rightarrow S'$ heißt **konform**, wenn gilt: Für alle $p \in S$ und alle $w, \tilde{w} \in T_p S$ ist

$$d\varphi_p(w) \cdot d\varphi_p(\tilde{w}) = \lambda^2(p)w \cdot \tilde{w}$$

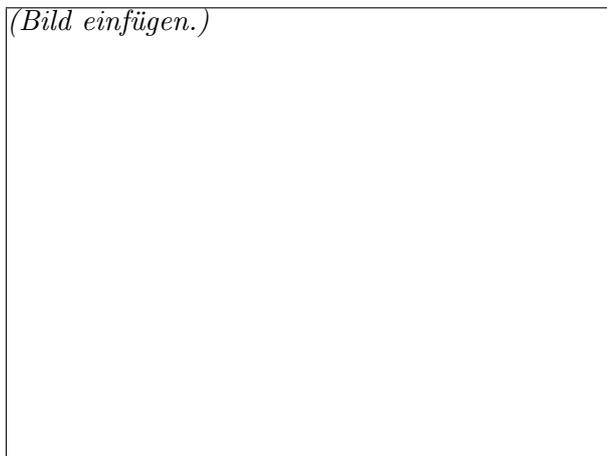
mit einer glatten Funktion $\lambda^2 > 0$.

Bemerkungen:

- 1.) $\lambda^2 \equiv 1 \iff \varphi$ Isometrie.
- 2.) Man nennt S, S' **konform äquivalent**, falls es eine konforme Abbildung $\varphi : S \rightarrow S'$ gibt. Offenbar handelt es sich dabei um eine Äquivalenzrelation (!).
- 3.) Ist $\varphi : S \rightarrow S'$ differenzierbar, so heißt φ **lokal konforme Abbildung**, falls es zu jedem $p \in S$ eine Umgebung U von \mathbb{R}^3 gibt mit $\varphi|_{U \cap S} : U \cap S \rightarrow \varphi(U \cap S) \subset S'$ konform.

Geometrische Interpretation:

(Bild einfügen.)



Seien c_1, c_2 zwei Kurven in S , $c_1, c_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, die sich zur Zeit $t = 0$ schneiden. Für den Schnittwinkel Θ bei $t = 0$ gilt $\cos \Theta = \frac{c_1'(0)}{|c_1'(0)|} \cdot \frac{c_2'(0)}{|c_2'(0)|}$. Ist $\varphi : S \rightarrow S'$ konform, so gehen c_1, c_2 über in $\varphi \circ c_1, \varphi \circ c_2$. Diese schneiden sich ebenfalls in $t = 0$ mit Schnittwinkel Θ' , für den gilt:

$$\cos \Theta' = \frac{(\varphi \circ c_1)'(0)}{|(\varphi \circ c_1)'(0)|} \cdot \frac{(\varphi \circ c_2)'(0)}{|(\varphi \circ c_2)'(0)|} = \frac{\lambda^2 c_1'(0) \cdot c_2'(0)}{\lambda^2 |c_1'(0)| |c_2'(0)|} = \cos \Theta.$$

Konforme Abbildungen erhalten zwar **nicht die Längen** zwischen Vektoren, **aber sie sind winkeltreu**.

Satz 1 hat das folgende Analogon im Kontext konformer Abbildungen:

SATZ 4

Seien S_1, S_2 reguläre Flächen und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Angenommen, es gibt lokale Parametrisierungen $X_1 : U \rightarrow S_1, X_2 : U \rightarrow S_2$, so dass für die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform gilt $\mathcal{E}_1 = \lambda^2 \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1 = \lambda^2 \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1 = \lambda^2 \mathcal{G}_2$ mit $\lambda^2 > 0$ und glatt auf U . **Dann ist $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(U) \rightarrow S_2$ lokal konform.**

Beweis: vgl. Satz 1

Lokale Konformität von regulären Flächen ist offenbar eine Äquivalenzrelation, tatsächlich gilt:

THEOREM

Je zwei reguläre Flächen sind lokal konform äquivalent.

Insbesondere ist jede reguläre Fläche lokal konform äquivalent zur Ebene $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (Konforme Koordinaten). Sind also S_1, S_2 reguläre Flächen, $p \in S_1, q \in S_2$ beliebig, so gibt es Umgebungen U von p, V von q in \mathbb{R}^3 sowie eine konforme Abbildung $\varphi : U \cap S_1 \rightarrow V \cap S_2$ mit $q = \varphi(p)$. Den Beweis findet man im Buch von L. Bers, Riemann Surfaces, p.15-p.35. Die Idee besteht darin, lokale Parametrisierungen $X : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow S$ zu konstruieren mit

$$(*) \quad \mathcal{E} = \lambda^2 = \mathcal{G}, \quad \mathcal{F} \equiv 0 \text{ auf } U$$

mit einer glatten Funktion $\lambda^2 > 0$ auf U . Für den Sonderfall zweier Minimalflächen kann man das Theorem mit weniger Aufwand beweisen. Im übrigen besagt * in unserer früheren Nomenklatur, dass man jede Fläche isotherm ($\mathcal{E} = \mathcal{G}, \mathcal{F} = 0$) parametrisieren kann.

Beispiel 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$ sei holomorph. Dann erfüllen u, v die Cauchy-Riemann Gleichungen $u_x = v_y, u_y = -v_x$, und mit $N := \{(x, y) \in$

$U : u_x^2 + u_y^2 = 0$ ist

$$\varphi : U \sim N \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

lokal konform, denn es gilt:

$$|\varphi_x|^2 = |(u_x, v_x)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x^2 + u_y^2 =: \lambda^2 > 0,$$

$$|\varphi_y|^2 = |(u_y, v_y)|^2 = u_y^2 + v_y^2 = u_y^2 + u_x^2 = \lambda^2,$$

$$\varphi_x \cdot \varphi_y = (u_x, v_x) \cdot (u_y, v_y) = u_x u_y + v_x v_y = u_x u_y - u_y u_x \equiv 0.$$

In diesem Sinn induzieren holomorphe Funktionen lokal konforme Abbildungen.

Beispiel 2

Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Einheitssphäre $S^2 : X : U \rightarrow S^2$, $X(\Theta, \varphi) := (\sin \Theta \cos \varphi, \sin \Theta \sin \varphi, \cos \Theta)$, $U := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Dann parametrisiert man um: $u = \varphi, v := \ln \tan(\Theta/2)$.

Es folgt

$$Y(u, v) = X(\Theta(v), \varphi(u)) = \left(\frac{1}{\cosh v} \cos u, \frac{1}{\cosh v} \sin u, -\tanh v \right).$$

(z.B.: $v := \ln \tan(\frac{\Theta}{2}) \implies \Theta = 2 \arctan(e^v)$; dann:

$$\cos \Theta = \cos(2 \arctan e^v) = \cos^2(\arctan e^v) - \sin^2(\arctan e^v) =$$

$$\frac{1}{1+\tan^2}(\arctan e^v) - \frac{\tan^2}{1+\tan^2}(\arctan e^v) = \frac{1}{1+e^{2v}} - \frac{e^{2v}}{1+e^{2v}} = \frac{1-e^{2v}}{1+e^{2v}} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = -\tanh v,$$

usw. Es folgt $Y(u, v) = \dots$). Für die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform bekommt man in dieser Darstellung:

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = (\cosh v)^{-2}, \mathcal{F} \equiv 0.$$

Mithin ist

$$Y^{-1} : S^2 \supset X(U) \rightarrow \text{Bild } Y^{-1} \subset \mathbb{R}^2$$

eine **konforme Abbildung**, genannt **Mercator-Projektion**. Mercator hat diese Form einer Weltkarte 1569 veröffentlicht. Hier werden die Meridiane $\varphi \equiv \text{const}$ und die Breitenkreise $\Theta \equiv \text{const}$ auf zueinander senkrechte Geraden abgebildet.

§ 3 Das Theorema Egregium von Gauß (1827)

wurde von Gauß selbst als “herausragender” Satz bezeichnet. Die Aussage gehört zu den wichtigsten Sätzen der Differentialgeometrie, sie lautet:

THEOREM

Die Gauß'sche Krümmung einer regulären Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.

Bemerkungen:

- 1.) Für die mittlere Krümmung H gilt das nicht, man betrachte etwa den Zylinder und die Ebene.
- 2.) Der Beweis des Satzes beruht auf der Beobachtung, dass man die Gauß-Krümmung K schreiben kann in Termen der Koeffizienten der Ersten Fundamentalform und Ableitungen dieser Koeffizienten. Unter einer lokalen Isometrie stimmen aber die Koeffizienten von I an den entsprechenden Stellen überein.
- 3.) Da das Katenoid lokal isometrisch zum Helikoid ist, folgt aus dem Theorem die Gleichheit der Gauß-Krümmung an den entsprechenden Stellen. Das sieht man den Flächen nicht sofort an!

Wir präzisieren Bemerkung 2.) und leiten die **partiellen Differentialgleichungen der Flächentheorie ab**: Sei $X : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit dem begleitenden 3Bein X_u, X_v, N . Es gelten die Gleichungen (jeder Vektor links ist Linearkombination des 3Beins)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + b_{11} N, b_{11} = \mathcal{L}, \\ \left\{ \begin{array}{l} X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + b_{12} N \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + b_{21} N \end{array} \right\}, b_{12} = b_{21} = \mathcal{M}, \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + b_{22} N, b_{22} = \mathcal{N}, \end{array} \right.$$

wobei wir die bekannten Definitionen der Koeffizienten aus II benutzt haben, etwa $\mathcal{L} := N_u \cdot X_u = N \cdot X_{uu}$. Außerdem haben wir noch die Weingarten-Gleichungen

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} N_u = -b_1^1 X_u - b_1^2 X_v \\ N_v = -b_2^1 X_u - b_2^2 X_v. \end{array} \right.$$

Wir benennen die Variablen um durch $(u, v) \leftrightarrow (u_1, u_2)$ und können (1), (2) **mit Summationskonvention** ersetzen durch

$$\begin{aligned} (1)' \quad X_{u_\alpha u_\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_{u_\gamma} + b_{\alpha\beta} N, \\ (2)' \quad N_{u_\alpha} &= -b_\alpha^\beta X_{u_\beta}, \end{aligned}$$

wobei (zur Erinnerung)

$$\begin{aligned} b_\alpha^\beta &:= b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \\ G &= (g_{\alpha\beta}), \quad G^{-1} = (g^{\alpha\beta}), \quad B = (b_{\alpha\beta}) \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &1^{\text{te}} \text{ Fundamentalform} \quad 2^{\text{te}} \text{ Fundamentalform} \end{aligned}$$

Man nennt

$$(3) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &\quad \text{Christoffel-Symbole 2ter Art,} \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} &:= g_{\beta\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \quad \text{Christoffel-Symbole 1ter Art.} \end{aligned}$$

Man nennt (1) bzw. (1)' die **Darstellungsformeln von Gauß für die zweiten Ableitungen**. Wir wollen die Christoffel-Symbole ausrechnen: Es ist

$$(4) \quad X_{u_\alpha u_\beta} \cdot X_{u_\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \overbrace{X_{u_\sigma} \cdot X_{u_\gamma}}{=g_{\sigma\gamma}=g_{\gamma\sigma}} = g_{\gamma\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \implies$$

$$\text{Symmetrie (5)} \quad \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha}.$$

$$\text{Außerdem gilt ersichtlich die Symmetrie (6)} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma.$$

$$(7) \quad \begin{cases} g_{\alpha\beta,\gamma} := \frac{\partial}{\partial u_\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial u_\gamma} (X_{u_\alpha} \cdot X_{u_\beta}) = X_{u_\alpha u_\gamma} \cdot X_{u_\beta} + X_{u_\beta u_\gamma} \cdot X_{u_\alpha} \stackrel{(4)}{=} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \stackrel{(3)}{=} \\ g_{\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\tau + g_{\alpha\tau} \Gamma_{\beta\gamma}^\tau, \end{cases}$$

und (5) - (7) ergeben

$$\begin{aligned} -g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} &= -g_{\beta\tau} \Gamma_{\alpha\gamma}^\tau - g_{\alpha\tau} \Gamma_{\beta\gamma}^\tau + g_{\gamma\tau} \Gamma_{\alpha\beta}^\tau + g_{\alpha\tau} \Gamma_{\gamma\beta}^\tau + g_{\gamma\tau} \Gamma_{\beta\alpha}^\tau + g_{\beta\tau} \Gamma_{\gamma\alpha}^\tau \\ &= 2g_{\gamma\tau} \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \implies -g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} = 2\Gamma_{\alpha\gamma\beta} \implies \end{aligned}$$

$$(8) \quad \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2} \{ g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma} \} .$$

Die Gleichung (8) sagt, dass sich die Christoffel-Symbole 1^{ter} Art allein durch 1^{te} Ableitungen der Ersten Fundamentalform beschreiben lassen. Gemäß(3) (Auflösen nach $\Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma$) gilt dies dann auch für die Christoffel-Symbole 2^{ter} Art. **Insbesondere sind alle geometrischen Größen, die durch die Christoffel-Symbole beschrieben werden, isometrie-invariant.** Ziel ist der Nachweis, dass die Gauß-Krümmung über die Christoffel-Symbole ausgedrückt werden kann. Dazu gehen wir zurück zu den Gauß-Gleichungen

$$(1)' \quad X_{u_\alpha u_\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_{u_\gamma} + b_{\alpha\beta} N$$

und differenzieren diese, wobei jetzt und nachfolgend $X_{,\beta,\gamma}$ für $X_{u_\beta u_\gamma}$, etc., geschrieben wird. Damit liest sich (1)' als

$$(1)' \quad X_{,\beta,\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma}^\delta X_{,\delta} + b_{\beta\gamma} N,$$

und es folgt als Gleichung für die 3^{ten} partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} X_{,\beta,\gamma\alpha} &= \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\tau X_{,\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\tau X_{,\tau\alpha} + b_{\beta\gamma,\alpha} N + b_{\beta\gamma} N_{,\alpha} \\ (1)',(2)' &\stackrel{=}{=} \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\tau X_{,\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\tau \left[\Gamma_{\tau\alpha}^\delta X_{,\delta} + b_{\tau\alpha} N \right] + b_{\beta\gamma,\alpha} N + b_{\beta\gamma} (-b_\alpha^\tau) X_{,\tau} \\ &= \left[\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\tau + \Gamma_{\delta\alpha}^\tau \Gamma_{\beta\gamma}^\delta - b_{\beta\gamma} b_\alpha^\tau \right] X_{,\tau} + \left[\Gamma_{\beta\gamma}^\tau b_{\tau\alpha} + b_{\beta\gamma,\alpha} \right] N. \end{aligned}$$

Die dritten Ableitungen sind offenbar symmetrisch, d.h.

$$X_{,\alpha\beta\gamma} = X_{,\beta\alpha\gamma} = X_{,\alpha\gamma\beta} \dots,$$

speziell $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$. Dann ist (der Koeff. von $X_{,\tau}$ verschwindet)

$$\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\tau + \Gamma_{\delta\alpha}^\tau \Gamma_{\beta\gamma}^\delta - b_{\beta\gamma} b_\alpha^\tau = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\tau + \Gamma_{\delta\beta}^\tau \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\tau \implies$$

$$(9) \quad \boxed{R_{\alpha\beta\gamma}^\tau := \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\tau - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\tau + \Gamma_{\delta\alpha}^\tau \Gamma_{\beta\gamma}^\delta - \Gamma_{\delta\beta}^\tau \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta = b_{\beta\gamma} b_\alpha^\tau - b_{\alpha\gamma} b_\beta^\tau}$$

$$\begin{aligned} & (= g^{\sigma\tau} (b_{\beta\gamma} b_{\alpha\sigma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\sigma})) \\ & \quad \uparrow \\ & \quad \text{Def. von } b_\alpha^\tau!. \end{aligned}$$

Analog zu (9) erhält man aus $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$, dass in der Differenz der Koeffizient vor N verschwindet, also:

$$(10) \quad \boxed{\Gamma_{\beta\gamma}^\tau b_{\tau\alpha} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\tau b_{\tau\beta} + b_{\beta\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma,\beta} = 0.}$$

Die Gleichungen (9) heißen **Gauß-Gleichungen**, und (10) nennt man die **Mainardi-Codazzi-Gleichungen**.

Gemäß Herleitung sind (9), (10) äquivalent zu $X_{,\beta\gamma\alpha} = X_{;\alpha\gamma\beta}$. Der **Riemannsche Krümmungstensor**

$$R : T_p S \times T_p S \times T_p S \rightarrow T_p S$$

wird definiert durch

$$(11) \quad R(U, V)W := R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau} U_{\alpha} V_{\beta} W_{\gamma} X_{,\tau} ,$$

wobei $U = U_{\alpha} X_{,\alpha}$, $V = V_{\beta} X_{,\beta}$, $W = W_{\gamma} X_{,\gamma}$. Ist $Z = Z_{\delta} X_{,\delta}$, so folgt aus (11) und (9)

$$R(U, V)W \cdot Z = R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau} U_{\alpha} V_{\beta} W_{\gamma} Z_{\delta} X_{,\tau} \cdot X_{,\delta} =: R_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha} V_{\beta} W_{\gamma} Z_{\delta} ,$$

wobei

$$(12) \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} := g_{\delta\tau} R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau} \stackrel{(9)}{=} b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} .$$

Für die Gauß-Krümmung gilt die Formel

$$K = \det(b_{\alpha\beta}) / W^2, \quad W^2 := \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 ,$$

d.h. mit obiger Setzung (vgl. (12))

$$R_{1212} = b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22} = -\det(b_{\alpha\beta}) = -KW^2 \implies (13)$$

$K = -R_{1212} / W^2$

Der Tensor 4^{ter} Ordnung $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist gemäß (12) aus den Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ der Fundamentalmatrix der Zweiten Fundamentalform zusammengesetzt, und er entsteht aus " $R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau}$ durch Multiplikation mit $g_{\delta\tau}$ ". In der Definitionsgleichung (9) für $R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau}$ hat man die Darstellung von $R_{\alpha\beta\gamma}^{\tau}$ durch die Christoffel-Symbole zweiter Art **und deren erste Ableitungen**. Aus (3) und (8) ergibt sich die Darstellbarkeit der Christoffel-Symbole 2^{ter} Art in Termen von $g_{\alpha\beta}$ und erster Ableitungen davon, also:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ sowie ersten und zweiten partiellen Ableitungen davon.}$$

Wegen $W^2 = \det(g_{\alpha\beta})$ ergibt (13) folgendes Schlussresultat:

Die geometrische Größe K - definiert durch die Zweite Fundamentalform - hängt nur ab von den Koeffizienten der Ersten Fundamentalform sowie deren ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Damit ist das Theoreme Egregium bewiesen. \square

Wir wollen noch Formeln für K ableiten: Speziell betrachten wir eine **orthogonale Parametrisierung**, d.h. per Definition $\mathcal{F} = X_u \cdot X_v = 0$. Dann ist

$$W^2 = \mathcal{E}\mathcal{G}$$

und mit der üblichen Symbolik ergibt (4):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= X_{uu} \cdot X_u = \frac{1}{2} \mathcal{E}_u, \\
\Gamma_{221} &= X_{uv} \cdot X_v = \frac{1}{2} \mathcal{G}_u = \Gamma_{122}, \\
\Gamma_{121} &= X_{uu} \cdot X_v = \mathcal{F}_u - \frac{1}{2} \mathcal{E}_v = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_v, \\
\Gamma_{212} &= X_{vv} \cdot X_u = \mathcal{F}_v - \frac{1}{2} \mathcal{G}_u = -\frac{1}{2} \mathcal{G}_u, \\
\Gamma_{112} &= X_{uv} \cdot X_u = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v, \\
\Gamma_{222} &= X_{vv} \cdot X_v = \frac{1}{2} \mathcal{G}_v,
\end{aligned}$$

wobei hier $(u_1, u_2) \leftrightarrow (u, v)$ ersetzt wurde. Daraus folgt für die Christoffel-Symbole zweiter Art (s. (4)) und benutze $(g_{\gamma\delta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & \mathcal{G} \end{pmatrix}$!

$$(14) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_u / \mathcal{E}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{G}_u / \mathcal{G}, \\ \Gamma_{11}^2 = -\mathcal{E}_v / 2\mathcal{G}, & \Gamma_{22}^1 = -\mathcal{G}_u / 2\mathcal{E}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v / \mathcal{E}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{G}_v / \mathcal{G}. \end{cases}$$

(13) ergibt

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}} R_{1212} \stackrel{(12)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}} g_{22} R_{121}^2 \\
&= -\frac{1}{\mathcal{E}} R_{121}^2 \stackrel{(9)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}} \left[\Gamma_{21,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{\delta 1}^2 \Gamma_{21}^\delta - \Gamma_{\delta 2}^2 \Gamma_{11}^\delta \right] \\
&\stackrel{(14)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}} \left[\frac{1}{2} (\mathcal{G}_u / \mathcal{G})_u + \frac{1}{2} (\mathcal{E}_v / \mathcal{G})_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 \right] \\
&\stackrel{(14)}{=} -\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{1}{2} \left[(\mathcal{G}_u / \mathcal{G})_u + (\mathcal{E}_v / \mathcal{G})_v + \frac{1}{2} (-\mathcal{E}_v / \mathcal{G}) \cdot (\mathcal{E}_v / \mathcal{E}) + (\mathcal{G}_u / \mathcal{G})^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\mathcal{G}_u / \mathcal{G}) \cdot (\mathcal{E}_u / \mathcal{E}) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \mathcal{G}_v / \mathcal{G} \right) \cdot (-\mathcal{E}_v / \mathcal{G}) \right] \\
&= -\frac{1}{2\mathcal{E}} \left[(\mathcal{G}_u / \mathcal{G})_u + (\mathcal{E}_v / \mathcal{G})_v - \frac{(\mathcal{E}_v)^2}{2\mathcal{E}\mathcal{G}} + \frac{(\mathcal{G}_u)^2}{2\mathcal{G}^2} - \frac{\mathcal{E}_u \mathcal{G}_u}{2\mathcal{E}\mathcal{G}} + \frac{\mathcal{E}_v \mathcal{G}_v}{2\mathcal{G}^2} \right].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung rechnet man nach:

SATZ 5

Sei S reguläre Fläche und $X : U \rightarrow S$ eine **orthogonale Parametrisierung** auf $U \subset \mathbb{R}^2$, also $\mathcal{F} = X_u \cdot X_v \equiv 0$. Dann gilt für die Gauß-Krümmung auf U

$$(15) \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_v}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\mathcal{G}_u}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \right) \right],$$

wobei wie üblich $\mathcal{E}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathcal{E}$, etc. Bei **isothermer Parametrisierung**, also $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{G} = \lambda^2 > 0$ ergibt (15)

$$(16) \quad K = -\lambda^{-2}\Delta(\ln \lambda), \Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} .$$

Bemerkung zu (16): Es ist jetzt

$$\mathcal{E}_v/\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}} = \frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2)/\lambda^2 = \frac{\partial}{\partial v}(\ln \lambda^2) = 2\frac{\partial}{\partial v}(\ln \lambda),$$

so dass

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathcal{E}_v/\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}) = 2\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\ln \lambda),$$

usw.

Die Gleichung von Gauß (9) und von Mainardi-Codazzi (10) sind für die Flächentheorie von derselben Bedeutung wie die Frenet'schen Formeln für Kurven, es gilt:

Theorem von Bonnet Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen. Auf V seien glatte Funktionen $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ ergeben mit $\mathcal{E}, \mathcal{G} > 0$. Man definiert **formal** die Christoffel-Symbole sowie die anderen Größen, die in den Gleichungen von Gauß (9) und Mainardi/Codazzi (10) auftreten, und verlangt, dass diese Gleichungen gelten. Dann gibt es zu jedem Punkt $q \in V$ eine Umgebung $U \subset V$ und eine Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $X(U)$ eine reguläre Fläche ist mit Koeffizienten $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ bzw., $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ für I bzw. II . Ist U zusammenhängend und $\tilde{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine andere Parametrisierung mit denselben Eigenschaften, so gilt $\tilde{X} = T \circ \rho \circ X$ mit einer Translation $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und einer orthogonalen Abbildung $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\det \rho > 0$.

Beweis

Do Carmo, deutsche Ausgabe, p.243 f; allerdings fehlen dort Details, aber es gibt Referenzen.

□

Folgerungen aus dem Theorema Egregium

(Alle Flächen S seien ab jetzt zusammenhängend)

Satz 6 (von Chern, 1945)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre **geschlossene** (d.h. S ist kompakt) Fläche mit positiver Gauß-Krümmung. Für die Hauptkrümmung gelte o.E. $\kappa_1 \geq \kappa_2$, $\kappa_2 = f(\kappa_1)$ (oder umgekehrt) mit einer monoton fallenden Funktion f . **Dann ist S eine Sphäre.**

Korollar 1

Ist S eine geschlossene reguläre Fläche mit Gauß-Krümmung $K \equiv \text{const} > 0$, so ist S eine Sphäre.

Beweis von Korollar 1

Zunächst kann man die Voraussetzung sogar noch etwas abschwächen, denn es folgt bereits aus $K \equiv \text{const}$ und der Geschlossenheit von S , dass $K > 0$ sein muss.

Dazu $S \subset B_R(0)$ und $R_0 = \inf\{R > 0 : S \subset B_R(0)\}$ der kleinste Radius. S und $S_0 := \partial B_{R_0}(0)$

haben einen Berührungspunkt $p \in S \cap S_0$. Dann ist $T_p S = T_p S_0$, also liegt S ganz auf einer Seite von $(T_p S) + p$ (affine Tangentialebene) und kann die affine Tangentialebene nur in p berühren. Das ergibt $K \geq 0$. $K = 0$ ist aber nicht möglich. Also ist $K = \kappa_1 \kappa_2$. O.E. sei $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Es folgt $\kappa_2 = K/\kappa_1$ und $f(\kappa_1) := K/\kappa_1$ fällt monoton. Chern'sche Satz liefert die Aussage.

Korollar 2 Sind S, \tilde{S} zueinander **isometrische** Flächen, und ist \tilde{S} **eine Sphäre**, so ist auch S **eine Sphäre**, und zwar mit demselben Radius wie \tilde{S} .

Beweis von Korollar 2

\tilde{S} Sphäre heißt $K_{\tilde{S}} \equiv \text{const}$ ($= 1/\text{Radius}$) und da S, \tilde{S} zueinander isometrisch sind, stimmen die Ersten Fundamentalformen von S und \tilde{S} an entsprechender Stelle überein, also nach dem Theorema Egregium $K_S \equiv \text{const}$.

Nun benutzt man Korollar 1. □

Korollar 3

Sei S eine **geschlossene** Fläche mit **positiver** Gauß-Krümmung K . Ist dann die **mittlere Krümmung H konstant**, so ist S **eine Sphäre**.

Beweis von Korollar 3

Es ist $2H = \kappa_1 + \kappa_2 \equiv c$, und $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ besagt, dass κ_1, κ_2 dasselbe Vorzeichen haben, O.E. $\kappa_1 \geq \kappa_2$. Es ist $\kappa_2 = c - \kappa_1$ fallend, Chern's Satz liefert die Behauptung. □

Beweis von Satz 6

Die Voraussetzungen $K > 0, \kappa_1 \geq \kappa_2, \kappa_2 = f(\kappa_1), f \downarrow$, seien erfüllt. Da S kompakt ist, nimmt κ_1 in einem Punkt $p \in S$ sein Maximum an. Offenbar ist p dann Minimum von κ_2 . Wir behaupten: p ist Nabelpunkt, also es gilt $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. Es folgt für $q \in S$

$$\kappa_1(p) \geq \kappa_1(q) \stackrel{\text{Vor.}}{\geq} \kappa_2(q) \geq \kappa_2(p),$$

also mit $\kappa_1 = \kappa_2$, jeder Punkt ist Nabelpunkt. Somit ist S Teil einer Sphäre. Da aber S kompakt und zusammenhängend ist, muss S selbst eine Sphäre sein.

ad *: Sei $\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$. Dann gilt $\kappa_1 > \kappa_2$ auch auf einer Umgebung von p (keine Nabelpunkte dort), und ohne Beweis sei vermerkt, dass es dann lokal bei p eine Parametrisierung $X : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ von S gibt, so dass $u \mapsto X(u, v), v \mapsto X(u, v)$

jeweils Krümmungslinien sind, also etwa $-N_u = \kappa_1 X_u$, $-N_v = \kappa_2 X_v$, $X_u \cdot X_v = 0$.
Es folgt $\mathcal{F} = 0$ sowie

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -N_u \cdot X_u = \kappa_1 X_u \cdot X_u = \kappa_1 \mathcal{E}, \\ \mathcal{M} &= -N_u \cdot X_v = \kappa_1 X_u \cdot X_v = 0, \\ \mathcal{N} &= -N_v \cdot X_v = \kappa_2 X_v \cdot X_v = \kappa_2 \mathcal{G}.\end{aligned}$$

Aus den Mainardi-Codazzi Gleichungen (10) bekommt man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v &= b_{11,2} \stackrel{(10)}{=} \Gamma_{21}^\tau b_{\tau 1} - \Gamma_{11}^\tau b_{\tau 2} + b_{21,1} \\ &= \Gamma_{21}^1 \mathcal{L} - \Gamma_{11}^2 \mathcal{N} + \underbrace{(\mathcal{M})_u}_{=0} \stackrel{(14)}{=} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{E}} \mathcal{L} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{G}} \mathcal{N} \implies \\ \mathcal{L}_v &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_v \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v (\kappa_1 + \kappa_2),\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\mathcal{N}_u = b_{22,1} \stackrel{(10)}{=} \dots \stackrel{(14)}{=} \frac{1}{2} \mathcal{G}_u (\kappa_1 + \kappa_2).$$

Andererseits ergibt $\mathcal{L} = \kappa_1 \mathcal{E}$ die Gleichung $\mathcal{L}_v = \mathcal{E}_v \kappa_1 + \mathcal{E}(\kappa_1)_v$, und aus $\mathcal{N}_u = \mathcal{G}_u = \kappa_2 + \mathcal{G}(\kappa_2)_u$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_v &= 2\mathcal{L}_v / \kappa_1 + \kappa_2 = 2\mathcal{E}_v \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2} + 2 \frac{\mathcal{E}(\kappa_1)_v}{\kappa_1 + \kappa_2} \\ \implies \mathcal{E}_v &= -\frac{2\mathcal{E}}{\kappa_1 - \kappa_2} (\kappa_1)_v, \\ \mathcal{G}_u &= 2\mathcal{N}_u / \kappa_1 + \kappa_2 = 2\mathcal{G}_u \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} + 2 \frac{\mathcal{G}(\kappa_2)_u}{\kappa_1 + \kappa_2} \\ \implies \mathcal{G}_u &= \frac{2\mathcal{G}}{\kappa_1 - \kappa_2} (\kappa_2)_u.\end{aligned}$$

Schließlich ersetzen in der Formel (15) für K die Größen $\mathcal{E}_v, \mathcal{G}_u$ durch obige Terme, es folgt:

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{2\mathcal{E}}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} (\kappa_1)_v \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2\mathcal{G}}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} (\kappa_2)_u \right) \right] \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \left[-\frac{2\mathcal{E}}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} (\kappa_1)_{vv} + \frac{2\mathcal{G}}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} (\kappa_2)_{uu} + (\kappa_1)_v f_1(u, v) + (\kappa_2)_u f_2(u, v) \right]\end{aligned}$$

mit geeignet definierten Funktionen f_1, f_2 . Also:

$$-2\mathcal{E}\mathcal{G}K = -\frac{2\mathcal{E}}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_1)_{vv} + \frac{2\mathcal{G}}{\kappa_1 - \kappa_2}(\kappa_2)_{uu} \\ ** \quad +(\kappa_1)_v f_1(u, v) + (\kappa_2)_u f_2(u, v).$$

Wegen $K > 0$ ist die linke Seite von $** < 0$. Sei $X(0, 0) = p$. Dann ist in $(0, 0)$

$$(\kappa_1)_v = (\kappa_2)_u = 0, (\kappa_1)_{vv} \leq 0, (\kappa_2)_{uu} \geq 0$$

(da p Max. von κ_1 , Min. von κ_2), so dass die rechte Seite von $** \geq 0$ ist, Widerspruch!
Die Annahme $\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$ ist falsch, es folgt $*$.

§ 4 Paralleltransport und geodätische Linien auf Flächen

Es sei hier $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ immer (Parametrisierung) eine(r) regulären Fläche, $\omega : [a, b] \rightarrow \Omega$ eine Kurve im Parameterbereich und $c := X \circ \omega$ die zugehörige Kurve auf X .

DEFINITION 5

Ein Vektorfeld $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt **tangential längs c** , falls für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$V(t) \in T_{c(t)}X.$$

$V_c :=$ alle tangentialen Vektorfelder längs c .

Ein beliebiges tangenciales Vektorfeld $V = V(t) \in V_c$ hat also die Darstellung (Summationskonvention)

$$V(t) = V_\alpha(t)X_{,\alpha}(\omega(t))$$

(Darstellung von $V(t) \in T_{c(t)}X$ durch die Basisvektoren $X_{,1}(\omega(t)), X_{,2}(\omega(t))$). Die Ableitung $V'(t)$ ist i.a. nicht tangential. Deshalb definiert man für $V \in V_c$ die **kovariante Ableitung**

$$\frac{DV}{dt} \in V_c$$

durch

$$\frac{DV}{dt}(t) := P(c(t))\left\{\frac{d}{dt}V(t)\right\}$$

wobei $P(c(t)) : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{c(t)}X$ die

orthogonale Projektion auf die Tangentialebene $T_{c(t)}X$ bezeichnet. Es gilt dann die **Produktregel**

$U, V \in V_c : \frac{d}{dt}(U \cdot V) = \frac{DU}{dt} \cdot V + U \cdot \frac{DV}{dt}$. Sei $V \in V_c$ Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= \frac{d}{dt} (V^\alpha X_{,\alpha}(\omega(t))) = \frac{d}{dt} V^\alpha X_{,\alpha}(\omega(t)) + V^\alpha \frac{d}{dt} X_{,\alpha}(\omega(t)) \\ &= \dot{V}_\alpha X_{,\alpha}(\omega(t)) + V^\alpha X_{,\alpha\beta}(\omega(t)) \dot{\omega}_\beta(t), \end{aligned}$$

wobei $\dot{V}_\alpha = \frac{d}{dt} V_\alpha$, ect.

Wir haben die Gauß'sche Darstellungsformel (vgl. (1)' in § 3)

$$X_{,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma X_{,\gamma} + b_{\alpha\beta} N,$$

also $\dot{V}(t) = [\dot{V}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega(t)) V_\alpha \dot{\omega}_\beta] X_{,\gamma}(\omega(t)) + V^\alpha b_{\alpha\beta} \dot{\omega}_\beta(t) N$, und für die kovariante Ableitung folgt

$$(1) \quad \boxed{\frac{DV}{dt}(t) = [\dot{V}_\gamma(t) + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega(t)) V_\alpha(t) \dot{\omega}_\beta(t)] X_{,\gamma}(\omega(t))}$$

Sei nun c nach der Bogenlänge parametrisiert, also $|\dot{c}(s)| = 1$. In Kapitel II, § 2, Gleichung (3), wurde gezeigt (κ_g geod. Krümmung, $\kappa_n =$ Normalkr.)

$$\ddot{c}(s) = \kappa_g(N(\omega(s)) \times \dot{c}(s)) + \kappa_n N(\omega(s)),$$

so dass $\frac{D}{ds} \dot{c}(s) = P(c(s)) \ddot{c}(s) = \kappa_g N(\omega(s)) \times \dot{c}(s)$. Folglich ist die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ von $c(s)$ 0 genau dann, wenn

$$(2) \quad \frac{D}{ds} \dot{c}(s) \equiv 0$$

ist. Mit (1) liest sich (2) ($V := \dot{c} = \frac{d}{ds}(X \circ \omega) = X_{,\rho}(\omega) \dot{\omega}_\rho$, also $V_\rho = \dot{\omega}_\rho$):

$$(3) \quad \ddot{\omega}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega) \dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}_\beta \equiv 0, \gamma = 1, 2 .$$

DEFINITION 6

- a) Man nennt Kurven $X \circ \omega = c$, die den Gleichungen (3) genügen, **Geodätische auf X** , und (3) heißen **Differentialgleichungen der Geodätischen**. Hier wird nicht verlangt, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist.
- b) Ein Vektorfeld $V(t) = V_\alpha(t) X_{,\alpha}(\omega(t)) \in V_c$ heißt **parallel längs c** , falls $\frac{DV}{dt} \equiv 0$, d.h. falls

$$(4) \quad \boxed{\dot{V}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega) V_\alpha \dot{\omega}_\beta \equiv 0, \gamma = 1, 2} \quad \text{gilt}$$

(vgl. (1)).

Bild einfügen

Sind U, V **parallele Vektorfelder** aus V_c , so ist $\frac{d}{dt}(U \cdot V) = U \cdot \frac{DV}{dt} + \frac{DU}{dt} \cdot V \equiv 0$;
 $(\Rightarrow |U(t)| \equiv \text{const}$ mit der Wahl $V = U!$) Speziell folgt für eine

Geodätische

$$\frac{d}{dt}(\dot{c} \cdot \dot{c}) \equiv 0,$$

d.h. $|\dot{c}(t)| \equiv \text{const}$. **Jede Geodätische ist automatisch proportional zur Bogenlänge parametrisiert**, und somit

verschwindet die geodätische Krümmung, wenn man auf die Bogenlänge umparametrisiert (nur für diesen Fall war κ_g erklärt).

Wir betrachten jetzt das Längenfunktional

$$L(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)| dt, \quad c = X \circ \omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Sei $V \in V_c$ ein tangentiales Vektorfeld längs c . Man variiert c in Richtung von V , d.h. man betrachtet eine Schar $\Psi(t, \varepsilon)$, $(t, \varepsilon) \in [a, b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ von Kurven $\Psi(\cdot, \varepsilon)$ auf X mit

$$\Psi(t, 0) = c(t), \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_0 \Psi(t, \varepsilon) = V(t).$$

Diese Schar gewinnt man z.B. durch die Setzung $\Psi(t, \varepsilon) = X(\omega(t) + \varepsilon \tilde{V}(t))$, $\tilde{V}(t) := (DX_{\omega(t)})^{-1}(V(t)) \in \mathbb{R}^2$. (Gemäß $V(t) \in T_{\omega(t)}X$ ist $\tilde{V}(t)$ wohldefiniert.) Man betrachtet nun die 1^{te} Variation

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_0 L(\Psi(\cdot, \varepsilon))$$

der Länge L an der Stelle c in Richtung V :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}|_0 \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \varepsilon) \right| dt &= \frac{d}{d\varepsilon}|_0 \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \varepsilon) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \varepsilon) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \varepsilon) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_0 \Psi(t, \varepsilon) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \dot{V}(t) dt = \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}(t)|} \dot{c}(t) \cdot \frac{DV(t)}{dt} dt, \end{aligned}$$

denn $\dot{c} \in V_c$, so dass $\dot{c} \cdot \dot{V} = \dot{c} \cdot \frac{DV}{dt}$. Ist c proportional zur Bogenlänge parametrisiert, also $|\dot{c}| \equiv \text{const} > 0$, und gilt $V(a) = V(b) = 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} \int_a^b |\dot{c}|^{-1} \dot{c}(t) \cdot \frac{DV}{dt}(t) dt &= |\dot{c}|^{-1} \int_a^b \frac{d}{dt} (\dot{c}(t) \cdot V(t)) dt \\ &- |\dot{c}|^{-1} \int_a^b V(t) \cdot \frac{D\dot{c}}{dt}(t) dt = -|\dot{c}|^{-1} \int_a^b V(t) \cdot \frac{D\dot{c}}{dt}(t) dt =: \delta L(c, V). \end{aligned}$$

Angenommen $L(c) \leq L(\tilde{c})$ für alle $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{c} = X \circ \tilde{\omega}$, mit $\tilde{c}(a) = c(a)$, $\tilde{c}(b) = c(b)$. Ist c **proportional zur Bogenlänge parametrisiert** und $V \in V_c$ mit $V(a) = V(b) = 0$, so erfüllen die Kurven

$$\Psi(t, \varepsilon) := X(\omega(t) + \varepsilon \tilde{V}(t)), \tilde{V}(t) := (DX_{\omega(t)})^{-1}(V(t))$$

, $\Psi(a, \varepsilon) = c(a)$, $\Psi(b, \varepsilon) = c(b)$, so dass $L(c) \leq L(\Psi(\cdot, \varepsilon))$, mithin

$$\delta L(c, V) = 0$$

für alle V wie oben; es folgt die bekannte Gleichung

$$(2) \quad \frac{D\dot{c}}{dt} \equiv 0,$$

die Kurve c ist eine Geodätische. Somit ergibt sich die Gleichung (2) für Geodätische als **Euler-Gleichung des**

Längenfunctionals, wenn man sich auf Kurven beschränkt, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Umgekehrt kann man zeigen, dass Geodätische zumindest lokal die Länge minimieren. Allerdings muss eine Geodätische **nicht kürzeste Verbindung** auf der Fläche X zwischen ihrem Anfangs- und Endpunkt sein! (Teile von Großkreisen liefern Beispiele).

Beispiele für Geodätische

- 1.) Wir betrachten die Ebene $X : (u, v) \mapsto (u, v, 0)$, also die Fläche $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Nach den Gauß'schen Darstellungsformeln gilt wegen $X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = 0$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$, so dass sich die Gleichungen (3) für eine Geodätische $c = X \circ \omega$

reduzieren auf $\frac{d^2}{dt^2} \omega_\gamma = 0$, $\gamma = 1, 2$. Also ist $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

und damit natürlich auch $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c = X \circ \omega$, **affin linear**.

- 2.) **Geodätische auf dem Zylinder:**

Sei Z der senkrechte Kreiszyylinder über dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

- a) **Jeder Kreis auf Z , den man als Schnitt mit einer Ebene parallel zur xy -Ebene erhält, ist eine Geodätische auf Z .**

Beweis: Ist $c(s)$ Parametrisierung eines solchen Kreises nach der Bogenlänge,

o.E. $c(s) = (u(s), v(s), 0)$, so ist \ddot{c} parallel zur Normalen an Z in $c(s)$, aus der Darstellung

$$\ddot{c} = \kappa_g(N \times \dot{c}) + \kappa_n N \text{ folgt } \kappa_g = 0.$$

- b) Um weitere Geodätische zu finden, wählen wir die Parametrisierung $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u_1, u_2) := (\cos u_1, \sin u_1, u_2)$ und beachten, dass X eine **lokale Isometrie** ist, vgl. §1, die die Ebene auf Z abbildet. Es gilt:

Unter lokalen Isometrien werden Geodätische auf Geodätische abgebildet.

Denn: Isometrien erhalten die Erste Fundamentalform und damit die Christoffel-Symbole, und nur diese gehen in die Gleichung (3) für Geodätische ein!

Also ergeben die X -Bilder von Geraden in der Ebene offenbar die Geodätischen auf Z .

Sei $p = X(0, 0) = (1, 0, 0)$. Dann ist nach dem gerade Gesagten jede Geodätische auf Z durch p das X -Bild von Geraden $\omega(s) = s(a, b)$ in \mathbb{R}^2 durch $(0, 0)$, $a^2 + b^2 = 1$.

$$a = 0 : \quad X(\omega(s)) = (1, 0 \pm s) \text{ senkrechte Gerade durch } p$$

$$b = 0 : \quad X(\omega(s)) = (\cos s, \pm \sin s, 0) \text{ Kreislinie (vgl. a)}$$

$$a \neq 0 \neq b : \quad X(\omega(s)) = (\cos(as), \sin(as), bs) \text{ Helix durch } p$$

3.) Geodätische auf S^2 :

Unter einem Großkreis auf S^2 versteht man den Schnitt von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung. Wie in 2.) a) überlegt man sich, dass für Großkreise $\kappa_g \equiv 0$ gilt, diese als Geodätische auf S^2 sind. Sei $p \in S^2$ und $c : I \rightarrow S^2$ eine Geodätische. Dann wird genau ein Großkreis \tilde{c} dadurch festgelegt,

dass er durch p gehen soll und dort $\dot{c}(0)$ als Tangentenvektor hat. Nach der Eindeutigkeitsaussage für Geodätische

folgt dann $\text{Spur } c \subset \text{Spur } \tilde{c}$.

Satz 7 (lokale Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen)

Es sei $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $S = X(\Omega)$. Ist $p \in S$ und

$W_0 \in T_p S$ mit $W_0 \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Geodätische $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, mit $c(0) = p$ und $c'(0) = W_0/|W_0|$.

Beweis

Es gelte $X^{-1}(p) = \tilde{p} \in \mathbb{R}^2$ sowie $w_0 := (DX_{\tilde{p}})^{-1}(W_0/|W_0|)$. Dann löst man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega)\dot{\omega}_\alpha\dot{\omega}_\beta = 0, \gamma = 1, 2, \\ \omega(0) = \tilde{p}, \dot{\omega}(0) = w_0, \end{cases}$$

was nach Sätzen über Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf einem passenden Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ möglich ist. $c(s) := X(\omega(s))$ ist dann die gesuchte Geodätische. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Theorie der gew. Dglen. \square

Kommen wir zum Schluss zurück zum Begriff des parallelen Vektorfeldes. Ist $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Ebene, etwa $X(u, v) = (u, v, 0)$, und

$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve darin, so sind alle Vektorfelder $V(t)$ mit $V_3(t) \equiv 0$ tangential zu c .

Offenbar ist $\frac{DV}{dt}(t) = \frac{d}{dt}V(t)$, denn $\frac{d}{dt}V(t) \in T_{c(t)}X = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Parallelität von V längs c heißt $\dot{V}(t) \equiv 0$, m.a.W.: Ist c eine ebene Kurve, so sind die zu c parallelen Vektorfelder genau die konstanten Vektorfelder (in der entsprechenden Ebene).

Satz 8

Es sei $c = X \circ \omega$ mit einer Kurve $\omega : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ist $W_0 \in T_{c(t_0)}X$ mit einem $t_0 \in [a, b]$ fixiert, **so gibt es genau ein paralleles Vektorfeld** $W \in V_c$ mit $W(t_0) = W_0$.

Beweis

Man löst das lineare System $\dot{W}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\omega)W_\alpha\dot{\omega}_\beta \equiv 0, \gamma = 1, 2$, zur entsprechenden Anfangsbedingung und setzt $W(t) = \bar{W}_\gamma(t)X_{,\gamma}(\omega(t))$. \square

Man nennt W die **Parallelverschiebung längs c von W_0** .