Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Klausur zur Vorlesung Differentialgeometrie (SoSe 2016)

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Betrachten Sie die parametrisierte Kurve α im $\mathbb{R}^3$,

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} e^u \\ 0 \\ \int_0^u \sqrt{1-e^{2t}}\,dt \end{pmatrix}, \quad u \in (-\infty, 0).$$

(i) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein in jedem Punkt der Kurve. (4P)

(ii) Bestimmen Sie die Schmiegebene in jedem Punkt der Kurve. (1P)

(iii) Betrachten Sie die Tangente an die Kurve in einem fixierten Punkt und berechnen Sie die Länge der Tangentenstrecke vom fixierten Berührpunkt bis zum Schnittpunkt mit der z-Achse. (2P)

b) Betrachten Sie nun für fixiertes $a > 0$ die Kurve $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\beta(t) = a\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right)\,d\xi \\ \int_0^t \sin\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right)\,d\xi \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Parametrisieren Sie die Kurve β nach Bogenlänge und berechnen Sie Krümmung und Torsion der nach Bogenlänge parametrisierten Kurve. (5P)

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Gegeben sei die Fläche mit der Parametrisierung

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u_1, u_2) \mapsto X(u_1, u_2) = \big(\sinh(u_2)\cos(u_1), \sinh(u_2)\sin(u_1), u_1\big).$$

a) Zeigen Sie, dass X regulär ist und bestimmen Sie die erste sowie die zweite Fundamentalform von X. (7P)

b) Berechnen Sie die Gaußkrümmung von X. (1P)

c) Untersuchen Sie, ob es unter den Koordinatenlinien

$$\gamma_1(u_1) := X(u_1, v),\ \gamma_2(u_2) := X(w, u_2) \text{ für } v, w \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

Asymptotenlinien gibt. (2P)

Bitte wenden!

d) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche X. (4P)

e) Zeigen Sie, dass die durch

$$\widetilde{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (v_1, v_2) \mapsto \widetilde{X}(v_1, v_2) := \big(v_2 \cos(v_1), v_2 \sin(v_1), v_1\big)$$

gegebene Fläche eine Umparametrisierung von X ist. (2P)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) ein regulär parametrisiertes Flächenstück und $\gamma := X \circ \omega$ ($\omega : I \to \Omega$, I ein Intervall) eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve auf X. Das *Darboux-Dreibein* $\mathbf{t}, \bar{\mathbf{s}}, \overline{\mathbf{N}}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \dot{\gamma}(s), \\ \bar{\mathbf{s}} &= \overline{\mathbf{N}}(s) \times \mathbf{t}(s), \\ \overline{\mathbf{N}}(s) &= \mathbf{N}(\omega(s)). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{N}$ die Einheitsnormale an die Fläche. Zeigen Sie, dass für dieses Dreibein die folgenden Ableitungsregeln gelten, die den Frenetschen Formeln entsprechen:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\bar{\mathbf{s}}} \\ \dot{\overline{\mathbf{N}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \bar{\mathbf{s}} \\ \overline{\mathbf{N}} \end{pmatrix}.$$

Dabei treten die folgenden Größen auf: $\kappa_g = \dot{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{s}}$ (die geodätische Krümmung), $\kappa_n = S_\omega(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}$ (die Normalkrümmung) sowie eine *geodätische Torsion* τ_g. Beweisen Sie die Formel $\tau_g = S_\omega(\mathbf{t}) \cdot \bar{\mathbf{s}}$. (7P)

b) Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ und $\gamma : \mathbb{R} \to S$ die verallgemeinerte Schraubenlinie $\gamma(t) := \big(\cos(t), \sin(t), at\big)$ mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Normalkrümmung von γ. (3P)

(ii) Zeigen Sie, dass die geodätische Krümmung κ_g von γ verschwindet. (2P)

Viel Erfolg!