UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I
Wintersemester 2017/2018

Blatt 1 Abgabetermin: /

Das Blatt wird in der Übung am 14.11.2017 besprochen.

Aufgabe 1

Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet die ebene Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(t,0)$ die Einheitskreislinie $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$ in genau einem von $(0,1)$ verschiedenen Punkt, der durch $(x(t), y(t))$ bezeichnet sei.

(i) Bestimmen Sie die Funktionen $x, y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass durch $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre Parametrisierung von $K \setminus \{(0,1)\}$ gegeben ist.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\alpha|_{[-1,1]}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(t)$.

Aufgabe 2

Begründen Sie, dass die folgenden Kurven im $\mathbb{R}^3$ endliche Länge haben und berechnen Sie diese:

(i) $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (6t, 3t^2, t^3)$,

(ii) $\gamma\colon [0,\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, t\sin(t), t\cos(t))$. (*Hinweis : Sie können folgende Identität ohne Beweis benutzen:* $\int_0^s \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+s^2}\cdot s + \operatorname{arsinh}(s)\right)$ *mit* $s > 0$.)

Aufgabe 3

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven nach der Bogenlänge:

(i) $\delta\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1)$,

(ii) $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

Aufgabe 4

Seien $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine reguläre Kurve, $[a,b] \subset I$ und $A = \alpha(a)$, $B = \alpha(b)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A)\cdot e \leq L_\alpha,$$

wobei L_α die Länge des Bogens von A nach B sei.

(ii) Die kürzeste Länge von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.