



Übungen zur Vorlesung  
Differentialgeometrie I  
Wintersemester 2017/2018

Blatt 5

Abgabetermin: /

Das Blatt wird in der Übung am 30.01.2018 besprochen.

**Aufgabe 1**

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und für  $r > 0$

$$\alpha_r: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \alpha(t) \pm rn_\alpha(t),$$

wobei  $n_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Normale von  $\alpha$  bezeichnet.  $\alpha_r$  heißt *innere (+) bzw. äußere (-) Parallelkurve* zu  $\alpha$  im Abstand  $r$ .

- (i) Wann ist  $\alpha_r$  regulär? Wann ist  $\alpha_r$  nach der Bogenlänge parametrisiert?
- (ii) Drücken Sie im Fall, dass  $\alpha_r$  regulär ist, die orientierte Krümmung  $\kappa_{\alpha_r}$  von  $\alpha_r$  durch die orientierte Krümmung  $\kappa_\alpha$  von  $\alpha$  aus.
- (iii) Seien  $I = \mathbb{R}$  und  $\alpha$  periodisch mit Periode  $l \in (0, \infty)$ . Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dr} L(\alpha_r|_{[0,l]})|_{r=0} = \mp 2\pi I(\alpha|_{[0,l]}),$$

wobei  $I(\alpha|_{[0,l]})$  den Rotationsindex von  $\alpha|_{[0,l]}$  und  $L$  die Bogenlänge bezeichnet.

---

**Aufgabe 2**

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine einfach geschlossene, reguläre und konvexe Kurve  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit nirgends verschwindender Krümmung heißt *Eilinie*.

- (i) Beweisen Sie, dass eine Eilinie  $\alpha$  zu jedem Einheitsvektor  $e$  genau einen Parameter  $s \in I$  mit  $t_\alpha(s) = e$  besitzt.
- (ii) Begründen Sie, dass  $\alpha$  nach dem orientierten Winkel  $\vartheta: I \rightarrow [0, 2\pi]$  zwischen dem Tangenvektor  $t_\alpha$  und der  $x$ -Achse umparametrisiert werden kann. Diese Koordinaten heißen *tangentiale Polarkoordinaten*.
- (iii) Es bezeichne  $\beta$  die gemäß (ii) in tangentialen Polarkoordinaten parametrisierte Eilinie  $\alpha$ . Die Kurve  $\beta$  heißt ein *Gleichdick*, falls für die *Stützfunktion*  $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vartheta \mapsto -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$  mit einer Konstanten  $d > 0$  gilt:

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d$$

für alle  $\vartheta \in [0, \pi]$ . Zeigen Sie, dass ein Gleichdick der Breite  $d$  den Umfang  $\pi d$  hat.

(Hinweis : Stellen Sie  $\beta$  bzgl. des Zweibeins  $(n_\beta, n'_\beta)$  und mittels der Stützfunktion  $h$  dar.)

(bitte wenden)

---

### Aufgabe 3

Seien  $L > 0$  und  $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene und konvexe Kurve mit positiver Orientierung und  $\alpha_r$  die äußere Parallelkurve im Abstand  $r > 0$  (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie:

- (i)  $U(\alpha_r) = U(\alpha) + 2\pi r$ ,
- (ii)  $A(\alpha_r) = A(\alpha) + Lr + \pi r^2$ .

Dabei bezeichnen  $U(\alpha)$  den Umfang und  $A(\alpha)$  den Inhalt des von der Kurve  $\alpha$  umschlossenen Gebietes. (*Hinweis*: Sie dürfen den folgenden Satz ohne Beweis benutzen: Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$  ein stetig differenzierbarer Weg mit positiver Krümmung und ohne Doppelpunkte (d.h.  $\alpha$  ist injektiv). Seien  $A = \alpha(a)$  und  $B = \alpha(b)$ . Dann begrenzen die Spur von  $\alpha$  und die Strecken  $\overline{OA}$  sowie  $\overline{BO}$  ein beschränktes Gebiet  $S \subset \mathbb{R}^2$ , dessen Inhalt durch die Formel

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - x'(t)y(t) dt$$

gegeben ist.)

---

### Aufgabe 4

Seien  $a > 0$  und

$$r: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto a \frac{\cos(2t)}{\cos(t)}.$$

Betrachten Sie die in Polarkoordinaten gegebene ebene Kurve

$$\alpha: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t)),$$

die man *Strophoide* nennt.

- (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen und zeigen Sie, dass sie die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -a\}$  als Asymptote hat.
  - (ii) Die Kurve  $\alpha$  hat im Ursprung einen *Doppelpunkt* (d.h. es gibt  $t_1 \neq t_2$  mit  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ ), sodass die Kurve eine Schleife bildet. Zeigen Sie, dass der Inhalt des von dieser Schleife umschlossenen Gebietes  $(2 - \frac{\pi}{2}) a^2$  beträgt (Skizze!).
  - (iii) Die Kurve schließt zusammen mit ihrer Asymptote eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Zeigen Sie, dass deren Inhalt  $(2 + \frac{\pi}{2}) a^2$  beträgt. (*Hinweis*: Betrachten Sie die um den Vektor  $(a, 0)$  verschobene Kurve und benutzen Sie die Formel aus Aufgabe 3.)
-