UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie II
Sommersemester 2018

Blatt 1 Abgabetermin: /

Das Blatt wird in der Übung am 02.05.2018 besprochen.

Aufgabe 1

Betrachten Sie für $a, b, c > 0$ die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

(i) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (Ellipsoid),

(ii) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (einschaliges Hyperboloid),

(iii) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right\}$ (zweischaliges Hyperboloid),

(iv) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (elliptisches Paraboloid),

(v) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (hyperbolisches Paraboloid).

Skizzieren Sie diese Mengen und stellen Sie möglichst große Teilmengen davon als parametrisierte Fläche dar.

Aufgabe 2

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, C die Spur einer regulären parametrisierten (ebenen) Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Bild}(\alpha) \subset \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; z = 0\right\}$ und $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; z = 0\right\}$ ein fixierter Punkt. Sei K die Punktmenge, welche dadurch entsteht, dass sich eine durch den Punkt P verlaufende Gerade längs der Kurve C bewegt.

(i) Finden Sie eine Parametrisierung X, deren Spur die Punktmenge K ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung von X. Wann handelt es sich bei X um eine reguläre Fläche?

(iii) Sei nun $P = (0,0,1)$. Untersuchen Sie die Situation, wenn C die Spur des Kreises $\alpha\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\; t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$ ist und fertigen Sie eine Skizze an.

(bitte wenden)

Aufgabe 3

Sei

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

(i) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gaußabbildung N von X.

(iii) Stellen Sie das Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,1)$ längs X in der Form

$$V = V^1 X_u + V^2 X_v + V^3 N$$

mit Funktionen $V^k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(k \in \{1,2,3\})$ dar.

(iv) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix G der ersten Fundamentalform von X.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Fundamentalmatrix G der ersten Fundamentalform

(i) für die Zylinderfläche

$$X\colon (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v),$$

(ii) für die Sphäre

$$X\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u)),$$

(iii) für die Kegelfläche

$$X\colon (0,2\pi) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto v(\cos(u), \sin(u), 1).$$
