**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Martin Fuchs
M. Sc. Dominik Schillo

# Übungen zur Vorlesung
## Differentialgeometrie II
Sommersemester 2018

**Blatt 2** Abgabetermin: /

---

**Das Blatt wird in der Übung am 16.05.2018 besprochen.**

### Aufgabe 1

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $X$ die Rotationsfläche einer regulären ebenen Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ um die $x$-Achse. Zeigen Sie, dass es stets eine Parametrisierung $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt, sodass

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

---

### Aufgabe 2

Betrachten Sie die Abbildung

$$X\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto ((a + b\sin(v))\sin(u), (a - b\cos(v))\sin(u), c\sin(u)),$$

wobei $a, b, c$ reelle Zahlen sind.

(i) Untersuchen Sie, wann durch $X$ eine reguläre parametrisierte Fläche erklärt wird.

(ii) Bestimmen Sie (im Falle der Regularität) die erste Fundamentalform von $X$.

---

### Aufgabe 3

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, doppelpunktfreie (d.h. $\alpha$ ist injektiv) Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Für ein $r > 0$ sei

$$X\colon I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \alpha(u) + r(\cos(v)n(u) + \sin(v)b(u)),$$

wobei $n$ und $b$ die Normale bzw. Binormale der *Leitkurve* $\alpha$ bezeichnen. Eine solche Fläche wird *Röhrenfläche* genannt.

(i) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von $X$. Unter welchen Voraussetzungen ist $X$ eine reguläre parametrisierte Fläche?

(ii) Bestimmen Sie die zu $X$ gehörige Gauß-Abbildung unter der Voraussetzung, dass $X$ regulär ist.

**(bitte wenden)**

(iii) Bestimmen Sie $X$, wenn die Leitkurve der Kreis $\alpha\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$ und $r = \frac{1}{2}$ ist. Skizzieren Sie diese Fläche.

---

## Aufgabe 4

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\varphi\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen der zweiten Fundamentalform $II$ (bzw. $II^{TX}$) von $X$ und der zweiten Fundamentalform $\widetilde{II}$ (bzw. $II^{T\tilde{X}}$) der umparametrisierten Fläche $\tilde{X} = X \circ \varphi$.

(i) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und alle $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\widetilde{II}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = II_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{V}).$$

(ii) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und alle $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{X}$ ist

$$II^{T\tilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V) = II^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V).$$

---