



Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie II
Sommersemester 2018

Blatt 3

Abgabetermin: /

Das Blatt wird in der Übung am 30.05.2018 besprochen.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Parametrisierung

$$X: (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}, (u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v),$$

d.h. X ist eine Parametrisierung des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie alle Normalschnitte sowie die minimale und maximale Normalkrümmung von X in $p = X(0, 0) = (1, 0, 0)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Schneidet die Fläche X_1 die Fläche X_2 längs einer regulären Kurve C , so ist die Krümmung κ von C in $p \in C$ gegeben durch

$$\kappa^2 \sin(\theta)^2 = \kappa_{n_1}^2 + \kappa_{n_2}^2 - 2\kappa_{n_1}\kappa_{n_2} \cos(\theta),$$

wobei κ_{n_1} und κ_{n_2} die Normalkrümmungen bei p längs der Tangente an C von X_1 bzw. X_2 sind und θ der Winkel zwischen den Normalenvektoren N_1 und N_2 von X_1 bzw. X_2 bei p ist.

(Hinweis : Betrachten Sie das von den Vektoren $\kappa_{n_1}N_2$ und $\kappa_{n_2}N_1$ aufgespannte Dreieck!)

Aufgabe 3

Seien a und r positive reelle Zahlen mit $r < a$ und definiere den Torus

$$X: (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto ((a + r \cos(s)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)).$$

- (i) Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform von X .
- (ii) Bestimmen Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt von X .
- (iii) Skizzieren Sie die Normalschnitte von X durch den Punkt $(a, 0, r)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4

Seien I ein offenes Intervall, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $w: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ glatt. Die Abbildung

$$X: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \alpha(u) + vw(u)$$

heißt *Regelfläche*, falls X regulär ist. Die Kurve α wird dabei *Leitkurve* und die Geraden $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, v \mapsto \alpha(u) + vw(u)$ ($u \in I$) werden die *Regelgeraden* genannt.

- (i) Unter welchen Bedingungen ist X eine reguläre parametrisierte Fläche?
 - (ii) Sei $u \in I$, sodass die Tangentialebene $T_{(u,v)}X$ von X in (u, v) für alle $v \in \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie, dass genau dann $T_{(u,v)}X = T_{(u,\tilde{v})}X$ für alle $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}$ gilt, wenn die Vektoren $\alpha'(u)$, $w'(u)$ und $w(u)$ linear abhängig sind.
 - (iii) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid (siehe Aufgabe 1 auf Blatt 1) eine Regelfläche ist. (*Hinweis* : Dritte binomische Formel.)
-