**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Martin Fuchs
M. Sc. Dominik Schillo

# Übungen zur Vorlesung
## Differentialgeometrie II
Sommersemester 2018

**Blatt 4** Abgabetermin: /

---

**Das Blatt wird in der Übung am 13.06.2018 besprochen.**

### Aufgabe 1

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $w \in \Omega$ und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Zeigen Sie: Durch die Abbildung

$$III_w\colon T_wX \times T_wX \to \mathbb{R},\ (U,V) \mapsto S_w(U) \cdot S_w(V)$$

wird eine symmetrische Bilinearform erklärt (*dritte Fundamentalform von $X$*) und es besteht die Beziehung

$$III_w - (\kappa_1(w) + \kappa_2(w))II_w + \kappa_1(w)\kappa_2(w)I_w \equiv 0.$$

Darin bezeichnen $\kappa_{1,2}(w)$ die Hauptkrümmungen von $X$ bei $w$.

---

### Aufgabe 2

Zeigen Sie die *Parameterinvarianz des Flächeninhalts*: Seien $\Omega, \tilde{\Omega}$ zwei Gebiete, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierte Fläche, $\varphi\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_\Omega |X_u(u,v) \times X_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\tilde{\Omega}} \left|\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\right|\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v}.$$

---

### Aufgabe 3

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares parametrisiertes Flächenstück. Definiere

$$X^\varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto X(u,v) + \varepsilon\varphi(u,v)N(u,v),$$

wobei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $N(u,v)$ der Normalenvektor von $X$ in $(u,v)$ sind. Zeigen Sie: Für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$ ist $X^\varepsilon$ für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ eine reguläre parametrisierte Fläche. Man bezeichnet diese als eine *Normalvariation von $X$*.

---

### Aufgabe 4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Als *Minimalfläche* bezeichnet eine parametrisierte Fläche $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit verschwindender mittlerer Krümmung $H \equiv 0$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass sich eine Minimalfläche auch dadurch charakterisieren lässt, dass für sie unter allen ihren Normalvariationen (vgl. Aufgabe 3) der Flächeninhalt extremal wird (Minimum *oder* Maximum!).

**(bitte wenden)**

(i) Es sei $X^\varepsilon$ eine Normalvariation von $X$ gemäß Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten $\mathcal{E}^\varepsilon, \mathcal{F}^\varepsilon$ und $\mathcal{G}^\varepsilon$ der ersten Fundamentalform von $X^\varepsilon$ der folgende Zusammenhang besteht:

$$\mathcal{E}^\varepsilon \mathcal{G}^\varepsilon - (\mathcal{F}^\varepsilon)^2 = (\mathcal{E}^0 \mathcal{G}^0 - (\mathcal{F}^0)^2)(1 - 4\varepsilon\varphi H) + R,$$

wobei $R = R(u, v, \varepsilon)$ mit $\lim_{\varepsilon \to 0} R(u, v, \varepsilon)/\varepsilon = 0$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass für den Flächeninhalt $\mathcal{A}(\varepsilon) = A(X^\varepsilon)$ gilt:

$$\mathcal{A}'(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H \equiv 0,$$

d.h. $\varepsilon = 0$ ist genau dann ein stationärer Punkt des Flächenfunktionals und der Flächeninhalt hat für $X$ ein lokales Extremum, wenn die mittlere Krümmung verschwindet.