UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie II
Sommersemester 2018

Blatt 5 Abgabetermin: /

Das Blatt wird in der Übung am 27.06.2018 besprochen.

Aufgabe 1

(i) Zeigen Sie, dass die Parametrisierung

$$X \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u, v, u^2 + v^2)$$

des elliptischen Paraboloids keine Asymptotenlinien besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Asymptotenlinien der Parametrisierung

$$X \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$$

des hyperbolischen Paraboloids.

Aufgabe 2

Seien $a, b > 0$. Betrachten Sie die *Wendelfläche* (*Helikloid*)

$$X \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (av\cos(u), av\sin(u), bu).$$

(i) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?

(ii) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche für $a = b = 1$.

(*Hinweis : Benutzen Sie* $\widetilde{\omega_2} = \operatorname{arsinh}(\omega_2)$.)

(iii) Zeigen Sie, dass X eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 3

(i) Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$X \colon (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

Berechnen Sie die geodätische Krümmung aller Breiten- und Längenkreise (u bzw. v-Koordinatenlinien).

(bitte wenden)

(ii) Die sog. *Pseudosphäre* ist die durch

$$P^2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \left(\frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{\sin(v)}{\cosh(u)}, u - \tanh(u) \right)$$

regulär parametrisierte Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass die Pseudosphäre konstante negative Gaußkrümmung besitzt.

Aufgabe 4

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung einer Fläche. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $H \equiv K \equiv 0$ auf Ω.

(ii) $X(\Omega)$ ist eine Teilmenge einer Ebene.
