



Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)

Blatt 1

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Es seien \overline{AB} Teil einer Geraden in der Ebene und $l > |\overline{AB}|$. Beweisen Sie, dass die Verbindungskurve der Länge l zwischen A und B , welche zusammen mit \overline{AB} den größtmöglichen Flächeninhalt einschließt, ein Kreisbogen durch die Punkte A und B ist.

Aufgabe 1.2 (5x2=10 Punkte)

Prüfen Sie, ob sich die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^3 als reguläre parametrisierte Flächen darstellen lassen. Falls dies nicht "global" möglich ist, stellen Sie möglichst große Teilmengen als reguläre parametrisierte Flächen dar; diese Teilparametrisierungen bezeichnet man auch als "Karten". Fertigen Sie jeweils eine Skizze an, und kennzeichnen Sie darin ggf. die verschiedenen Karten.

- (a) $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 = z - 3y^2\}$.
- (b) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 2\}$.
- (c) $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 = 4z^2\}$.
- (d) $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$.
- (e) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \text{spur } \alpha\}$.

Aufgabe 1.3 (3x3=9 Punkte)

Sei C die Spur einer regulären Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) mit $0 \notin C$. Sei K die Punktmenge, welche dadurch entsteht, dass eine Ursprungsgerade sich längs der Kurve C bewegt.

- (a) Finden Sie eine Parametrisierung X , deren Spur die Punktmenge K ist.
- (b) Bestimmen Sie die Punkte, in denen X nicht regulär ist.
- (c) Was muss man aus K entfernen, damit die verbleibende Menge eine reguläre parametrisierte Fläche ist?

Aufgabe 1.4 (5+5=10 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $P \in \mathbb{R}^3$ und $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung der Form:

(a) $X(u, v) = P + v\alpha(u),$

(b) $X(u, v) = \alpha(u) + vP$

mit einer Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wann handelt es sich um eine parametrisierte Fläche?

Abgabe: Ankündigung in der Vorlesung am 26.10.12