Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Darya Apushkinskaya

Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)
Blatt 2

Aufgabe 2.1 (2,5 x 3= 7,5 Punkte)

Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right).$$

a) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

b) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung N von X.

c) Stellen Sie das durch $V(u,v) := (u,v,1)$ definierte Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ längs X in der Form
$$V = V^1 X_u + V^2 X_v + V^3 N$$
mit Funktionen $V^k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(k = 1,2,3)$ dar.

Aufgabe 2.2 (3+2=5=10 Punkte)

Betrachten Sie die *stereographische Projektion* $\pi : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$, die einen Punkt $P = (x,y,z)$ der Sphäre S^2 (mit Mittelpunkt $(0,0,1)$) ohne den Nordpol $N = (0,0,2)$ auf den Schnittpunkt der (x,y)-Ebene mit den Geraden, die N und P verbindet, abbildet. Es sei $(u,v) = \pi(P)$.

a) Zeigen Sie, dass $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ gegeben ist durch
$$x = \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \quad y = \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \quad z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}.$$
Skizzieren Sie die Situation zunächst.

b) Welcher Teil der Sphäre kann mit der stereographischen Projektion als parametrisierte Fläche dargestellt werden?

c) Berechnen Sie $|\pi_u^{-1}|^2$, $|\pi_v^{-1}|^2$, $\pi_u^{-1} \cdot \pi_v^{-1}$.

Aufgabe 2.3 (5+5=10 Punkte)

Skizzieren Sie für ein $a > 0$ die folgenden Flächen sowie deren Gauß-Abbildungen. Dabei seien $u \in (0, 2\pi)$ und $v \in \mathbb{R}$.

a) $X(u,v) = (a\sinh(v)\cos(u), a\sinh(v)\sin(u), au)$ *(Helikoid).*

b) $X(u,v) = (a\cosh(v)\cos(u), a\cosh(v)\sin(u), av)$ *(Katenoid).*

Aufgabe 2.4 (7,5 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine Umparametrisierung von X. Wir bezeichnen als $\widetilde{N}$ die Gauß-Abbildung von $\widetilde{X} := X \circ \varphi$. Zeigen Sie ausführlich die Gültigkeit der Formel:

$$\widetilde{N}(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = \operatorname{sign} \det D\varphi(\widetilde{u}, \widetilde{v}) N\left(\varphi(\widetilde{u}, \widetilde{v})\right), \qquad (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{\Omega}.$$

Abgabe: Freitag 09.11.12