



Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)
Blatt 6

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)

Geben Sie die Definition der sogenannten parabolischen Punkte einer Fläche und recherchieren Sie die Begriffe „Asymptotenlinie“ und „Geodätische“ auf einer Fläche.

Aufgabe 6.2 (3x4=12 Punkte)

Betrachten Sie die durch die Parametrisierung $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + (h(v), 0, v),$$

gegebene Fläche im \mathbb{R}^3 , wobei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion sei.

- Skizzieren Sie die Fläche in den Fällen $h \equiv 0$ und $h(v) = v^2$.
- Zeigen Sie, dass es sich um eine parametrisierte Fläche handelt und bestimmen Sie die Gauß-Abbildung.
- Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung $K = K(u, v)$ von X gegeben ist durch

$$K = -\frac{h''(v) \cos u}{(1 + h'(v)^2 \cos^2 u)^2}.$$

Bestimmen Sie ferner den geometrischen Ort der parabolischen Punkte von X im Fall $h(v) = v^2$.

- Unter welchen Bedingungen sind die Koordinatenkurven $t \rightarrow X(u, t)$ ($u \in (0, 2\pi)$ fest) Asymptotenlinien von X ? Sind diese Kurven unter jenen Bedingungen auch Geodätische?

Aufgabe 6.3 (4x3=12 Punkte)

Seien $\varepsilon > 0$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine reguläre Fläche mit mittlerer Krümmung H und Gauß-Krümmung K , so dass $1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2 > 0$ ist. Die Fläche $\widehat{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\widehat{X}(u, v) = X(u, v) + \varepsilon N(u, v)$$

heißt Parallellfläche zu X . Dabei bezeichnet N die Gauß-Abbildung von X . Zeigen Sie:

a) Auf Ω gilt

$$\widehat{X}_u \times \widehat{X}_v = (1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2) X_u \times X_v,$$

und die Gauß-Abbildung von \widehat{X} stimmt mit der von X überein.

b) Bezeichnen S_ω und \widehat{S}_ω die Weingarten-Abbildungen von X bzw. \widehat{X} zu einem fixierten Parameterpunkt $\omega = (u, v) \in \Omega$, so gilt:

$$\widehat{S}_\omega \left(D\widehat{X}_\omega \circ (DX)_\omega^{-1}(U) \right) = S_\omega(U)$$

für alle Vektoren U aus der Tangentialebene $T_\omega X$ von X bei ω .

c) Bezeichnen κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen von X , so sind die Hauptkrümmungen $\widehat{\kappa}_1, \widehat{\kappa}_2$ von \widehat{X} gegeben durch

$$\widehat{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{1 - \varepsilon\kappa_1} \quad \text{und} \quad \widehat{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{1 - \varepsilon\kappa_2}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie Teil b)).

Abgabe: Freitag 11.01.13