Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Darya Apushkinskaya

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)
Blatt 8

Aufgabe 8.1 (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre (eingebettete) zusammenhängende Fläche. Für $p, q \in S$ sei

$$d(p,q) = \inf \{L(c) : c \text{ Kurve in } S \text{ von } p \text{ nach } q\}$$

Zeigen Sie, dass d die Menge S zu einem metrischem Raum macht.

Aufgabe 8.2 (4+4+4=12 Punkte)

Es seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine parametrisierte Fläche und $c := X \circ \omega$, $\omega : I \to \Omega$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) glatt, eine Kurve auf dieser Fläche. Für $w \in \Omega$ sei $P_w : \mathbb{R}^3 \to T_w X$ die *Orthogonalprojektion* in $T_w X$, i.e.

$$P_w(V) = V - (V \cdot N(w))\, N(w).$$

Dann heißt $\dfrac{D\dot{c}}{dt}(t) := T_{\omega(t)}\,(\ddot{c}(t))$ die *kovariante Ableitung* von $\dot{c}$.

a) Zeigen Sie, dass für jede Kurve c in der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gilt:

$$\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv \ddot{c}.$$

Was sind die Geodätischen der Ebene?

b) Betrachten Sie die Einheitssphäre, parametrisiert durch

$$X(u,v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v).$$

Zeigen Sie, dass der *Äquator* (die Koordinatenkurve $u \mapsto X(u,0)$) der einzige geodätische *Breitenkreis* (die Koordinatenkurven $u \mapsto X(u,\cdot)$) von X ist.

c) Sind die *Meridiane* (die Koordinatenkurven $v \mapsto X(\cdot,v)$) von X Geodätische?

Aufgabe 8.3 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass Katenoid und Helikoid lokal isometrisch sind.

Hinweis: Betrachte die bekannten Parametrisierungen

$$X^K(u,v) = (\cosh u \cos u, \cosh v \sin u, v)$$
$$X^H(u,v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

von Katenoid und Helikoid, und ersetze in X^H die Variable v durch $\sinh v$.

Abgabe: Freitag 01.02.13