Maß- und Integrationstheorie

Grundlagen der Maßtheorie

Ziel : Entwicklung allgemeiner Konzepte, die es gestatten, z.B. Volumina und Oberflächen von Körpern $\subset \mathbb{R}^3$ sinnvoll zu definieren und zu berechnen; "sinnvoll" soll heißen :

für den Einheitswürfel $[0,1]^3$ *erwartet man als Volumen 1* !

Wie interpretiert man Volumenmessung?

Standpunkt :

- **Volumenmessung** ist eine **Abbildung**

$$\mu : \{\text{Teilmengen des } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow [0,\infty]$$

mit gewissen Eigenschaften, z.B. :

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

für **disjunkte** Mengen ("**abzählbare Additivität**")

- Flächenmessung ist eine **Abbildung**

$$\lambda : \{2\,\mathrm{dim}\ \text{ Mfkten } \subset \mathbb{R}^3\} \longrightarrow [0,\infty]$$

mit o.g. Eigenschaften, wobei man μ und λ noch **normiert**, d.h. z.B. $\mu([0,1]^3) = 1$. Wir werden später sehen, dass durch diese Bedingung an μ tatsächlich eine geometrische Volumenmessung in $\mathbb{R}^3$ festgelegt wird.

Zunächst wollen wir den allgemeinen Standpunkt ausbauen, d.h. Maße auf beliebigen Grundmengen X studieren. Dabei ist $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X.

Definition 0.1 : *Maße*

Sei X eine beliebige Menge.
Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ heißt **ein Maß auf X**, *falls gilt:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Für **jede** *Teilmenge A von X und alle* **abzählbaren** *Familien $(B_i)_{i\in I}$ von Mengen $B_i \subset X$ gilt :*

$$\boxed{A \subset \bigcup_{i\in I} B_i \Longrightarrow \mu(A) \leq \sum_{i\in I} \mu(B_i)}$$ **(abzählbare Subadditivität)**

"σ- Subadditivität"

Bemerkungen :

1) $\mu(A) = 0$: A heißt μ-**Nullmenge**
   (abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen)

2) Aus (ii) folgt die **Monotonie** :

$$A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

3) In (ii) bedeutet "abzählbar" : $\# I < \infty$ oder $I \cong \mathbb{N}$.

Definition 0.2 :

a) Sei λ ein Maß auf X. $A \subset X$ heißt λ-messbar, falls

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(B - A) \; \forall B \subset X.$$

b) Sei X eine **beliebige Menge**, *Y ein* **topologischer** *Raum, λ ein Maß auf X. $f : X \to Y$ heißt* **λ-messbar**, *falls $f^{-1}(\Omega)$ λ-messbar ist für alle* **offenen** *$\Omega \subset Y$.*

Bemerkung 0.3 :

1) Im Fall des Lebesgue-Maßes sind alle offenen und abgeschlossen Mengen, sowie deren Vereinigungen und Durchschnitte messbar (demnach fast alle Mengen).

2) Messbarkeit ist ein sehr allgemeines Konzept, so sind etwa fast alle Funktionen messbar bzgl. des Lebsegue-Maßes. Insbesondere folgt aus Messbarkeit bzgl. des Lebesgue-Maßes die Stetigkeit einer Funktion.

Das Lebesgue - Maß $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$

ist für geometrische Anwendungen wie Volumenmessung das wichtigste Maß.

Definition 0.4 : *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei*

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} |Q_i| : \begin{array}{l} (Qi)_{i \in I} \text{ ist höchstens abzählbare Überdeckung} \\ \text{von } A \text{ durch } \textbf{abgeschlossene} \text{ Quader } Q_i \end{array} \right\}$$

das **sogenannte Lebesgue-Maß von A**. *(genauer: n-dim. Lebesgue-Maß)*

$$\textit{Hier :} \quad \begin{array}{rcl} Q &=& [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], \\ |Q| &:=& (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n). \quad \text{"Elementarvolumen"} \end{array}$$

Satz 0.5 : (Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$)

(i) Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U \text{ offen} \supset A\}$.

(ii) $\mathcal{L}^n$ ist ein Radon-Maß.

(iii) Translationsinvarianz : $\mathcal{L}^n(b + A) = \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$

(iv) Homogenität vom Grad n: $\mathcal{L}^n(r \cdot A) = r^n \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, r \geq 0, A \subset \mathbb{R}^n$

(v) Seien $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^n$ *und* $T(x) = (r_1 x_1, \ldots, r_n x_n)$. *Dann gilt :*

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = |r_1 \ldots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(A).\ (\textit{beachte : } \det T = r_1 \ldots r_n)$$

Satz 0.6 : (Eindeutigkeit von $\mathcal{L}^n$)

$\mathcal{L}^n$ *ist das* **einzige Maß** λ *auf* $\mathbb{R}^n$ *mit*

(i)	*Translationsinvarianz :*	$\lambda(b + A) = \lambda(A) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^n$
(ii)	*Additivität auf Quadern :*	*Für* **disjunkte** *Quader* $\subset \mathbb{R}^n$ *gilt* $\lambda(Q_1 \cup Q_2) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2)$
(iii)	*Normierung :*	$\lambda([0,1]^n) = 1$
(iv)	*Regularität :*	$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U \textit{ offen }\} \quad \forall\, A \subset \mathbb{R}^n$

Bemerkung 0.7 *Auf analoge Weise definiert man das s-dimensionale Hausdorff-Maß* $\mathcal{H}^s$. *Im* $\mathbb{R}^n$ *misst das* $(n-1)$*-dimensionale Hausdorff-Maß* $\mathcal{H}^{n-1}$ *Oberflächen auf natürliche Weise.*

Lebesgue - Integration

ist ein allgemeines Konzept zur Definition von $\int f d\lambda$, wenn λ ein Maß auf X ist und f eine λ-messbare Funktion $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Als „Spezialfälle" bekommen wir

- $\int_a^b f(t)\, dt$ für Regelfunktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
- Volumenintegrale $\int\limits_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\, d^n(x_1, \ldots, x_n)$ über Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie Verfahren zur Berechnung.

Definition 0.8 :

(a) Sei λ *ein Maß auf* X. *Eine Funktion* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **λ-Treppenktion**, *falls* **Bild f abzählbar** *ist, d.h. wir können eine disjunkte Zerlegung* $(X_i)_{i=1}^\infty$ *von* X *finden mit*

$$f \equiv \alpha_i \quad \textit{auf } X_i$$

für reelle Zahlen $(\alpha_i)_{i=1}^\infty$.

(b) Sei g λ*-Treppenfunktion. Man setzt :*

$$\int g\, d\lambda := \sum_{y \in [0,\infty)} y \cdot \lambda(g^{-1}(\{y\})) \;= \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \lambda(X_i)$$

mit der Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$.

$\int g\, d\lambda \in [0, \infty]$ *heißt* **λ-Integral von g**, *andere Schreibweisen (mit Angabe der Integrationsvariable) :* $\int g(x)\, d\lambda(x)$, $\int g(y)\, d\,\lambda(y)$, *etc.*

Bemerkungen :

(1) Da $g^{-1}(\{y\})$ nur für höchstens abzählbar viele $y \geq 0$ nicht-leer ist, macht die Summe Sinn in $[0, \infty]$.

(2) Die Konvention „$0 \cdot \infty = 0$” läßt sich so erklären : ist $g \equiv 0$ auf einer Menge mit λ- Maß ∞, so liefert dies anschaulich keinen Beitrag zum Integral.

Definition 0.9 : $\boldsymbol{\lambda}$-Integral

Sei λ ein Maß auf der Menge X und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ λ-messbar.

(i) Das **$\boldsymbol{\lambda}$-Oberintegral von $\boldsymbol{f}$** *ist definiert durch*

$$\overset{*}{\int} f\, d\lambda := \inf \left\{ \int g\, d\lambda : \begin{array}{l} g \textit{ ist } \lambda\textit{-integrierbare Treppenfunktion} : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \textit{mit } g \geq f \ \lambda\textit{-f.ü.} \end{array} \right\}.$$

Ist $f = \infty$ auf einer Menge mit positivem Maß, so gibt es **keine** *λ-Treppenfunktion g mit $g \geq f$ f.ü.*

Dann sei $\overset{*}{\int} f\, d\lambda := +\infty$

(ii) Das **$\boldsymbol{\lambda}$-Unterintegral von $\boldsymbol{f}$** *ist erklärt durch*

$$\underset{*}{\int} f\, d\lambda := \sup \left\{ \int h\, d\lambda : \begin{array}{l} h \textit{ ist } \lambda\textit{-integrierbare Treppenfunktion} : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \textit{mit } h \leq f \ \lambda\textit{-f.ü.} \end{array} \right\}.$$

Man setzt : $\underset{*}{\int} f\, d\lambda := -\infty$, falls $\{\ldots\} = \emptyset$.

(iii) f **$\boldsymbol{\lambda}$-messbar** $\iff$ $\underset{*}{\int} f\, d\lambda = \overset{*}{\int} f\, d\lambda$ *in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Den gemeinsamen Wert von Ober- und Unterintegral bezeichnet man dann mit

$$\int \boldsymbol{f\, d\lambda}.$$

Achtung :
$\int f\, d\lambda$ ist **nicht notwendig** *eine reelle Zahl, es ist durchaus $\int f\, d\lambda = \pm\infty$ möglich.*

(iv) Ist $\int f\, d\lambda \in \mathbb{R}$, so nennen wir f **$\boldsymbol{\lambda}$-summierbar***.*

Satz 0.10 : Eigenschaften von $\int$

Sei λ ein Maß auf X, f, $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ-messbar.

(i) $f \leq g$ λ-f.ü. $\Longrightarrow \int f\, d\lambda \leq \int g\, d\lambda$

$\Rightarrow$ *(ii)* $f \geq 0$ λ-f.ü. $\Longrightarrow \int f\, d\lambda \geq 0$

(iii) für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int (c \cdot f)\, d\lambda = c \int f\, d\lambda$

(iv) $\int (f + g)\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda$

(v) $\left| \int f\, d\lambda \right| \leq \int |f|\, d\lambda$

Für eine λ-messbare Teilmenge A von X gilt

(vi) $\left| \int\limits_A f\, d\lambda \right| \leq \lambda(A)\, \|f\|_{\infty;A}$

(vii) $\int\limits_A 1\, d\lambda = \lambda(A)$

Satz 0.11 : (Satz von Fubini)

Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset Q \to \overline{\mathbb{R}}$ *mit einem Quader* $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ *gilt*

$$\int\limits_Q f d\mathcal{L}^n = \int\limits_Q f(x_1, ..., x_n) d\mathcal{L}^n(x_1, ..., x_n) = \int\limits_{a_n}^{b_n} ... \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n.$$

Satz 0.12 : (Transformationsformel für $\mathcal{L}^n$-Integral)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $\Phi : A \longrightarrow \Phi(A)$ *ein* C^1*-Diffeomorphismus. Dann gilt für* $g : \Phi(U) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}^n$*-messbar*

$$\int\limits_{\Phi(A)} g \, d\mathcal{L}^n = \int\limits_A g \circ \Phi |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n,$$

wobei keins der Integrale existiert oder beide existieren in $\overline{\mathbb{R}}$ *und sind gleich.*

Satz 0.13 : (Satz von Gauß)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ *offen, zusammenhängend und beschränkt,* ∂G *sei eine* $(n-1)$*-dim. Mannigfaltigkeit,* $\mathcal{N}(x) \in (T_x \partial G)^\perp$ *sei der äußere Normalenvektor* $(|\mathcal{N}| = 1)$*. Ist* $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ *für* $U \supset \overline{G}$ *offen, so gilt*

$$\int_G \operatorname{div} F \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial G} \langle F, \mathcal{N} \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$