Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 — Mathematik

Mathematische Grundlagen der Fluid Mechanik

nach einer Vorlesung von

Dr. Dominic Breit

Wintersemester 2010/2011.

Einleitung

Ein klassisches Problem der Fluid Mechanik sind die Navier-Stokes Gleichungen für Newtonsche Fluide (z.B. Wasser, Luft sowie die meisten Öle). Gegeben sei ein Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, in dem die Fließbewegung innerhalb des Zeitintervalls $[0,T]$ stattfindet, sowie eine Kraft $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, die diese beinflusst (z.B. Gravitation oder elektrisches Feld).
Gesucht ist das Geschwindigkeitsfeld $v : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ der Teilchenbewegung sowie der Druck $p : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ innerhalb des Fluids als Lösung des folgenden Systems partieller Differentialgleichungen

$$-\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \Delta v = \rho (\nabla v) v + \nabla p - \rho f \quad \text{auf} \quad [0,T] \times \Omega.$$

Hierbei beschreibt $\nu \in (0, \infty)$ die Viskosität des Fluids und $\rho \in (0, \infty)$ ist die Massendichte, die als konstant angenommen wird, was für viele Flüssigkeiten und Gase eine gute Approximation darstellt. Dies bedeutet insbesondere, dass das Fluid inkompressibel ist. $(\nabla v)v$ repräsentiert einen Wirbel, der bei langsamen Geschwindigkeiten vernachlässigt werden kann (Stokes Problem).
Obige Gleichungen sind das Ergebnis physikalischer Überlgungen zu Massen- und Impulserhaltung innerhalb eines Fluids, wobei die Annahme eines linearen konstitutiven Gesetzes (Newtonsches Fluid) maßgeblich eingeht. Experimente belegen ein solches Verhalten für strukturell einfache Fluide wie Gase und Flüssigkeiten mit leichten Molekülen.
Unser Ziel ist es die Existenz schwacher und starker Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen zu erarbeiten. Zunächst ist es daher notwendig, die „natürlichen“ Funktionenräume bereitzustellen, in denen die Existenz verallgemeinerter (schwacher) Lösungen gezeigt werden kann. Argumente der Regularitätstheorie zeigen schließlich, dass es sich sogar um starke Lösungen im klassischen Sinn handelt. Beginnen werden wir dabei mit dem klassischen Stokes-Problem: Finde $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\nu \Delta v = \nabla p - \rho f \quad \text{auf} \quad \Omega.$$

Hierbei handelt es sich um ein linearisiertes Problem unter Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit.

Warnung.

Dieses Skript dient als ergänzendes Begleitmaterial zur Vorlesung. Es kann und soll den Besuch sowie eine Mitschrift der Vorlesung nicht ersetzen, und erhebt keinen Anspruch auf Fehlerfreiheit oder Vollständigkeit.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Herleitung der Gleichungen

In diesem Kapitel werden wir ausgehend von den physikalischen Gesetzen der Massen- und Impulserhaltung die Navier-Stokes Gleichungen herleiten.

Im Folgenden betrachten wir einen Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ein zwei- oder dreidimsionales Gebiet, in dem wir den Fluss eines Fluids beobachten (Flüssigkeiten und Gase). Wir leiten die Gleichungen für allgemeine Fluide her, begrenzen unsere mathematischen Untersuchen jedoch auf das Verhalten eines inkompressiblen (d.h. die Dichte is konstant) Newtonschen Fluids. Es bezeichne $v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ die Fießgeschwindigkeit der Teilchenbewegung und $\rho(t,x)$ die Massendichte jeweils im Punkt $x \in \Omega$ zur Zeit $t \in [0,T]$.
Das Gesetz der Massenerhaltung besagt, dass die gesamte Masse einer Flüssigkeit in einem festen Volumen $V \subset \Omega$ nur dann zu- oder abnehmen kann, wenn durch die Oberfläche ∂V entsprechend viel Masse zu- oder abfließt. Mathematisch entspricht dieser Sachverhalt der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathcal{L}^d = - \int_{\partial V} (\rho v \cdot \mathcal{N}) \, d\mathcal{H}^{d-1}, \tag{0.1}$$

wobei $\mathcal{N}$ die äußere Einheitsnormale an ∂V ist. Man beachte, dass Fließbewegungen in Richtung $\mathcal{N}$, die Masse verkleinern, daher das Minus rechts. Wir erhalten zunächst mit dem Satz von Gauß

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{L}^d = - \int_V \operatorname{div}(\rho v) \, d\mathcal{L}^d. \tag{0.2}$$

Da $V \subset \Omega$ beleibig gewählt werden kann, folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \tag{0.3}$$

Besitzt zudem die Flüssigkeit eine konstante Dichte, d.h. insbesondere, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist (durch Druckeinwirkung ist keine Volumenänderung möglich), dann vereinfacht sich (0.3) zu

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{0.4}$$

Wir wollen nun eine Formel für die Änderung des Impulses

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v \, d\mathcal{L}^d \tag{0.5}$$

herleiten. Zunächst erscheint auf der rechten Seite der Term

$$-\int_{\partial V} \rho v \cdot \mathcal{N} v \, d\mathcal{H}^{d-1} = -\int_{\partial V} (\rho v \otimes v)\mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1}, \tag{0.6}$$

wobei $\eta \otimes \xi := \eta\xi^T$ ist. Bei der Impulserhaltung spielt nicht nur der Massenzufluss durch die Oberfläche ∂V, $V \subset \Omega$ eine Rolle, sondern es muss zudem die Kraft berücksichtigt werden, die der Teil der Teil der Flüssigkeit außerhalb von V auf die Flüssigkeit innerhalb V ausübt. Diesen zusätzlichen Impulsfluss bezeichnen wir mit dem symmetrischen Tenser $\tau \in R^{d\times d}$. Die Kompenenten $\tau_{i,j}$ von τ geben den Fluss der j-ten Impulskomponente in die i-te Koordinatentrichtung an (man beachte, dass der Impuls jeder Komponente ein Vektor ist, was eine Matrix ergibt). Über die genaue Gestalt von τ werden wir uns im Anschluss Gedanken machen müssen. Diese Überlegung ergibt das Integral

$$\int_{\partial V} \tau\mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1}, \tag{0.7}$$

welches ebenfalls hinzuzufügen ist. Schließlich berücksichtigen wir noch äußere Kräfte, z.B. die Gravitation, beschrieben durch

$$\int_V \rho f \, d\mathcal{L}^d. \tag{0.8}$$

Hierbei ist $f : [0,T] \to \Omega \to \mathbb{R}^d$ die Beschleunigung, die von äußeren Kräften aufgebracht wird (im folgenden wird f kürzer einfach als äußere Kraft bezeichnet). (0.5) bis (0.7) ergibt zusammen

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v \, d\mathcal{L}^d = -\int_{\partial V} (\rho v \otimes v)\mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\partial V} \tau\mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_V \rho f \, d\mathcal{L}^d. \tag{0.9}$$

Nach Anwendung des Satzs von Gauß erhalten wir

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) \, d\mathcal{L}^d = -\int_V \operatorname{div}(\rho v \otimes v) \, d\mathcal{L}^d + \int_V \operatorname{div}\tau \, d\mathcal{L}^d + \int_V \rho f \, d\mathcal{L}^d. \tag{0.10}$$

Die Beliebigkeit von V zeigt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = -\operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \operatorname{div}\tau + \rho f. \tag{0.11}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung. Die Erhaltungsgleichungen (0.3) und (0.11) gelten für alle Flüssigkeiten und Gase. Wir wollen unsere Überlegungen auf inkompressible Fluide beschränken, d.h. wir nehmen an, dass ρ konstant ist und erhalten aus (0.11)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho \operatorname{div}(v \otimes v) + \operatorname{div} \tau + \rho f$$

Man beachte, dass die Annahme einer konstanten Dichte für viele Flüssigkeiten und Gase eine gute Approximation darstellt. Unter Zuhilfenahme von

$$\operatorname{div}(v \otimes v) = (\operatorname{div} v)v + (\nabla v)v$$

ist dies gleichbedeutend mit

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho (\nabla v)v + \operatorname{div} \tau + \rho f$$

Physikalische Experimente zeigen, dass für inkompressible Fluide die Beziehung

$$\tau = -pI + \sigma \tag{0.12}$$

gilt. Hierbei ist $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$ der hydrodynamische Druck innerhalb des Fluids. Dieser hängt sowohl von der Temperatur als auch der Dichte ab. $\sigma = \sigma(x,t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist der Spannungstensor. Die Relation (0.12) führt uns auf

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho (\nabla v)v - \nabla p + \operatorname{div} \sigma + \rho f. \tag{0.13}$$

Schließlich benötigen wir ein konstitutives Gesetz, dass es uns ermöglicht den Spannungstensor σ zur bestimmen. Experimente belegen, dass sich für strukturell einfache Fluide wie Gase und Flüssigkeiten mit leichten Molekülen der Tensor σ aus Newtons Viskositätsgesetz berechnen lässt:

$$\sigma = 2\nu\epsilon(v), \quad \epsilon(v) := \frac{1}{2}\left(\nabla v + \nabla v^T\right). \tag{0.14}$$

Hierbei bezeichnet $\nu > 0$ die Viskosität des Fluids, ein Maß für die Zähflüssigkeit (je größer die Viskosität, desto dickflüssiger ist das Fluid). Fluide, die diesem linearen Gesetz gehorchen, werden als Newtonsche Fluide bezeichnet, dazu gehören viele Flüssigkeiten des Alltagsgebrauchs wie Wasser und die mesiten Öle. Luft is ebenfalls ein Newtonsches Fluid. Man beachte, dass aus (0.14)

$$\operatorname{div} \sigma = \nu \Delta v$$

folgt. Wir erhlaten also insgesamt das folgende System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{cases} -\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \nu\Delta v = \rho(\nabla v)v + \nabla p - \rho f & \text{auf} \quad [0,T]\times\Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{auf} \quad [0,T]\times\Omega. \end{cases} \tag{0.15}$$

Zwei Annahmen sind wesentlich eingegangen:

- Die Dichte ist konstant,
- Die Beziehung zwischen σ und $\epsilon(v)$ ist linear.

Als Verallgemeinerung hierzu werden auch Nicht-Newtonsche Fluide untersucht (diese sind jedoch nicht Gegenstand der Vorlesung). Hier nimmt man eine nichtlineare Beziehung zwischen σ und $\epsilon(v)$ an, genauer gesagt

$$\sigma = \nu(|\epsilon(v)|)\epsilon(v),$$

mit der verallgemeinerten Viskositätsfunktion ν, die von der Scherrate $|\epsilon(v)|$ abhängt. Hierbei unterscheidet man zwischen verdickenden Fluiden, ν ist monoton wachsend (z.B. Teig), und verdünnenden Fluiden, ν ist monoton fallend (z.B. Ketchup, Blut). Ein beliebtes Modell hierfür ist z.B.

$$\nu(|\epsilon(v)|) = |\epsilon(v)|^{p-2}.$$

Zwei Vereinfachungen von (0.15) sind möglich. Zum einen kann man die Annahme treffen, dass das Fluid genügend Ziet hatte um seinen Gleichgewichtszustand anzunehmen, was bedeutet, dass v unabhängig von der Zeit ist. In diesem Fall erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{cases} \nu\Delta v = \rho(\nabla v)v + \nabla p - \rho f & \text{auf} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{auf} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.16}$$

Dieses System partieller Differentialgleichungen ist als stationäres Navier-Stokes Problem bekannt. Unter der Annahme eines langsamen Flusses lässt sich der Term $(\nabla v)v$ im Vergleich zu den restlichen Termen vernachlässigen. Wir erhalten ein linearisertes Problem

$$\begin{cases} \nu\Delta v = \nabla p - \rho f & \text{auf} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{auf} \quad \Omega, \end{cases} \tag{0.17}$$

das klassische Stokes-Problem.

Während bei gewöhnlichen Differentialgleichungen Anfangswerte vorgegeben werden, muss bei partiellen Differentialgleichungen das Verhalten der Lösung auf dem Rand vorgegeben werden. Vielfach wird hier die einfachste Variante angenommen:

$$v = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Betrachtet man das instationäre Problem (0.15), so muss wegen der Zeitabhängigkeit zusätzlich zu den Randwerten

$$v = 0 \quad \text{auf} \quad [0, T] \times \partial\Omega$$

ein Startwert vorgegeben werden:

$$v(0, \cdot) = v_0 \quad \text{auf} \quad \Omega,$$

mit einer Funktion $v_0 : \Omega \to \mathbb{R}^d$.
Wir beginnen mit der Untersuchung des klassischen Stokes-Problems. Bei Betrachtung des Problems erwartet man eine Lösung $(v, p) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \times C^1(\Omega)$. Dies lässt sich jedoch nur über einen Umweg zeigen. Zunächst wird das Problem umformuliert, was uns auf eine schwache Version von (0.17) führt. Es wird sich zeigen dass Hilberträume besonders geeignet sind um lineare partielle Differentialleichungen in schwacher Form zu lösen. Es stellt sich also zunächst die Frage, wie wir einen Hilbertraum aus (differenzierbaren) Funktionen erhaten. Dem werden wir in Kapitel 2 nachgehen. Natürlich ist

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega uv \, dx$$

ein Skalarprodukt, jedoch ergibt $(C^0(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ keinen vollständigen Raum. Zur Begründung betrachten wir das folgende Beispiel:
Sei $\Omega := B_1(0)$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Für $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolge (u_n), welche gegeben wird durch

$$u_n(x) := \frac{x_1}{\frac{1}{n} + |x|}.$$

Jedes u_n ist offenbar stetig in Ω mit $|u_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in \Omega$. Ferner strebt (u_n) punktweise auf Ω gegen die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$u(x) := \begin{cases} \frac{x_1}{|x|} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases} . \tag{0.18}$$

Nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz gilt daher

$$\int_\Omega \big|u_n(x) - u(x)\big|^2 \, dx = \langle u_n - u, u_n - u\rangle \xrightarrow{n} 0. \tag{0.19}$$

Daraus folgt, dass (u_n) eine Cauchy–Folge in $C^0(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_2$ ist, die aber nicht konvergiert.
Denn angenommen, es existiert ein $w \in C^0(\Omega)$ mit $\|u_n - w\|_2 \xrightarrow{n} 0$. Wegen (0.19) würde dann aber

$$\int_\Omega \big|u(x) - w(x)\big|^2 \, dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w = u \quad \mathcal{L}^d\text{–f. ü. auf } \Omega$$

folgen, was wegen der Stetigkeit von w in Ω und wegen $u \in C^0(\Omega \setminus \{0\})$ zu dem Widerspruch $w = u$ in $\Omega \setminus \{0\}$ führt. (Das hieße, dass w eine stetige Fortsetzung von u auf ganz Ω ist. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} u(x)$ existiert jedoch nicht.)
Unsere Beobachtungen führen also zu dem Schluß, dass *schwache* Normen (d. h. solche, die durch Integrale definiert werden) mit *klassischen* Funktionenräumen (wie z. B. C^0) nicht verträglich sind. Unser erstes Ziel ist daher die Entwicklung eines Hilbertraums, der aus Funktionen besteht, bzw. eines Hilbertraum deren Elemente (in irgendeinem Sinn) differenzierbar sind. Damit können wir mit recht einfachen funktionalanalytischen Argumeneten die Existenz einer schwachen Lösung von (0.17) in diesem Raum zeigen. Dies erfolgt im ersten Teil von Kapitel 3, während danach der Frage nachgehen wieso diese schwache Lösung eine Lösung von (0.17) im klassischen Sinn ist. Anschließend beschäftigen wir uns mit dem nichtlinearen Problem (0.16), die Argumente sind ähnlich zum klassischen Stokes-Problem allerdings brauchen wir ein anderes Hilfsmittel um die Existenz zu beweisen. Am Ende der Vorlesung widmen wir uns schließlich dem zeitabhängigen Problem.

§ 2. Lebesgue- und Sobolev-Räume

Ziel dieses Kapitels ist es die „natürlichen“ Funktionenräume bereitzustellen, in denen die Existenz schwacher Lösungen gezeigt werden kann. Dabei handelt es sich um Lebesgue- bzw. Sobolev-Räume, die integrierbare bzw. schwach differenzierbare Funktionen enthalten.

Wir vereinbaren zunächst einige Sprechweisen, welche aus der elemtaren Maßtheorie bekannt sind.
Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und sei $\mu : \wp(X) \to [0, \infty]$ ein Maß über X (wobei $\wp(X)$ wie üblich die Potenzmenge von X bezeichnet), d. h. μ hat die Eigenschaft:

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

für alle $A, A_n \in \wp(X)$ mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Nach *Carathéodory* heißt eine Menge $A \in \wp(X)$ *μ–messbar*, falls für jedes $B \in \wp(X)$ gilt:

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Eine Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *μ–messbar*, falls das Urbild $u^{-1}(I)$ eines jeden Intervalls $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine *μ–messbare* Menge ist. [a]
Sei E eine Eigenschaft von Funktionen. Wir sagen, u habe *μ–fast–überall* (kurz: μ–f. ü.) auf X die Eigenschaft E, falls die Menge

$$N := \big\{x \in X;\ u(x) \text{ erfüllt nicht } E\big\}$$

eine μ–Nullmenge, also $\mu(N) = 0$ ist. Wir sagen auch, u habe in *μ–fast–allen* (kurz: μ–f. a.) Punkten $x \in X$ die Eigenschaft E.
Zwei Funktionen $u, w : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind demnach μ–f. ü. identisch auf X, falls

$$\mu\big(\big\{x \in X;\ u(x) \neq w(x)\big\}\big) = 0$$

[a] Ein (verallgemeinertes) Intervall in $\overline{\mathbb{R}}$ ist ein Intervall, bei dem auch die unenlich fernen Punkte $\pm\infty$ als Grenzen zugelassen sind (z. B. $(0, \infty]$, $[-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$).

ist. Beispielsweise ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ bzgl. dem eindimensionalen Lebesgue–Maß $\mathcal{L}^1$ f. ü. auf $\mathbb{R}$ identisch der Nullfunktion.

Wir sind daran interessiert einen Hilbertraum bestehend aus Funktionen zu definieren. Offenbar definiert

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega uv\, dx$$

ein Skalarprodukt z.B. auf $C^0(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Wie wir bereits in Kapitel 1 gesehen haben, ist der Raum $C^0(\Omega)$ zusammen mit der Norm

$$\|u\|_2 := \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

nicht vollständig, d.h. wir erhalten keinen Hilbertraum. Wir müssen die zugrundeliegende Menge von Funktionen vergrößern um dies zu erreichen.

In diesem § wird uns die Frage beschäftigen, wie man integrierbare Funktionen $X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu einem normierten Raum — welcher sinnvollerweise ein Banach–Raum sein sollte — zusammenfassen kann.

Anscheinend sind *schwache* Normen (d. h. solche, die durch Integrale definiert werden) mit *klassischen* Funktionenräumen (wie z. B. C^0) nicht verträglich sind.
Das liegt daran, dass der Wert eines Integrals unverändert bleibt, wenn man aus dem Integrationsbereich eine Nullmenge herausschneidet. Mit anderen Worten: F. ü. identische Funktionen haben die gleiche Integral–Norm.

Betrachten wir die oben definierte Norm, so fällt auf, dass aus $\|u\|_2 = 0$ nur $u(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ folgt. Lediglich für stetige Funktionen ergibt sich daraus $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Die naheliegende Idee um die Definitheit der Norm zu erreichen ist, die f. ü. identischen Funktionen zu einer Einheit zusammenzufassen, also Äquivalenzklassen solcher Funktionen zu bilden:
Sei (X, μ) ein Maßraum und für eine μ–messbare Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ sei

$$[u] := \left\{w : X \to \overline{\mathbb{R}};\ u \sim w\right\}$$

die Äquivalenzklasse von u bzgl. der Relation

$$u \sim w \quad :\Longleftrightarrow \quad u = w \quad \mu\text{–f. ü. auf } X.$$

Es gilt:

i) *u ist μ–*integrierbar*, d. h. es ist $\int_X \big|u(x)\big|\, d\mu(x) < \infty$, falls jedes $w \in [u]$ μ–*integrierbar *ist. In diesem Fall ist offenbar*

$$\int_X \big|u(x)\big|\, d\mu(x) = \int_X \big|w(x)\big|\, d\mu(x) \quad \textit{für alle} \quad w \in [u].$$

ii) $[0] = \big\{w : X \to \overline{\mathbb{R}};\ w = 0\ \mu\text{–f. ü. auf } X\big\}$.

iii) Sind $u, w : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ–messbar und μ–f. ü. endlich (d. h. μ–f ü. reell) auf X, so machen $[u + w]$ und $[cu]$ $(c \in \mathbb{R})$ Sinn.

Definition 2.1 (Fast überall definierte Funktion)
Eine μ–f.ü. (eindeutig) definierte Funktion von $X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist die Äquivalenzklasse $[u]$ einer μ–messbaren und μ–f. ü. endlichen Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Als Beispiel betrachte man die Äquivalenzklasse der Funktion $u(x) = \frac{x}{|x|}$: für jeden Vertreter kann in $x = 0$ ein beliebiger Wert vorgegeben werden.

Wir vergessen also die Äquivalenzklasse $[u]$ und reden von einer μ–f. ü. eindeutig definierten Funktion u (später werden wir auch wieder nur von einer Funktion reden, wohlwissend, dass es sich dabei um eine Äquivalenzklasse von Funktionen handelt). Diese kann natürlich nicht mehr punktweise ausgewertet werden; es gibt lediglich ein eindeutig bestimmtes Integral (sofern dieses existiert). Eine punktweise Auswertung ist demnach nur nach Wahl eines Vertreters bzw. Repräsentanten für $[u]$ möglich.

Bemerkung 2.1 *i) Eine μ–f. ü. definierte Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist p. d. $\leq, =, \geq 0$, falls entsprechendes für jeden Vertreter der zugeh. Äquivalenzklasse $[u]$ zutrifft. Beispielsweise bedeutet $\big[\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\big] = 0$, dass jede mit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ $\mathcal{L}^1$–f. ü. auf $\mathbb{R}$ übereinstimmende Funktion $\mathcal{L}^1$–f. ü. identisch der Nullfunktion ist.*

*ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine $\mathcal{L}^d$–messbare Funktion. Dann gibt es in $[u]$ höchstens einen stetigen Vertreter (vgl. A. 2.**??**). Allgemein braucht eine solche Funktion also nicht einmal stetig zu sein.*
Gibt es für die fast überall eindeutig definierte Funktion u genau einen stetigen Vertreter (bzw. genau einen Vertreter der Klasse C^k mit einem $k \in [1, \infty]$), so nennt man u selbst wieder stetig (bzw. von der Klasse C^k) und schreibt wie üblich wieder $u \in C^0(\Omega)$ (bzw. $u \in C^k(\Omega)$). (Man beachte, dass diese Sprechweise nur dann Sinn macht, wenn es nur genau einen solchen Vertreter gibt!)

Definition 2.3 (Lebesgue–Raum)
Sei (X, μ) ein Maßraum und sei $1 \leq p < \infty$. Dann heißt der durch

$$L^p(X;\mu) := \big\{u : X \to \overline{\mathbb{R}};\ u\ \mu\text{–f. ü. definiert mit } \|u\|_p < \infty\big\}$$

mit

$$\|u\|_p := \|u\|_{p;X} := \left(\int_X \big|u(x)\big|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \in [0,\infty]$$

erklärte normierte Raum $\big(L^p(X;\mu), \|\cdot\|_p\big)$ der Lebesgue–Raum der auf X bzgl. dem Maß μ p–summierbaren Funktionen.

i) Sei $\mathbb{N}$ versehen mit dem Zählmaß $\mu_\#$. Dann sind die bzgl. $\mu_\#$ messbaren Funktionen Folgen $u := (u_n) \subset \mathbb{R}$, und es gibt nur eine $\mu_\#$–Nullmenge, nämlich die leere Menge. Man erhält hier

$$\int_{\mathbb{N}} u(x) \, d\mu_\#(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

und schreibt auch ℓ^p statt $L^p(\mathbb{N};\mu_\#)$. Dann ist

$$u \in \ell^p \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big|u_n(x)\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ist. Der Raum ℓ^p heißt der Raum der p–summierbaren Folgen. Insbesondere ist ℓ^1 genau der Raum der absolut konvergenten Zahlenreihen.

ii) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ schreiben wir üblicherweise $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\Omega;\mathcal{L}^d)$. Weiter unten werden wir auch L^p–Räume $L^p(\Omega)^D = L^p(\Omega,\mathbb{R}^D)$ für Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^D$ ($D \in \mathbb{N}$ mit $D \geq 2$) erklären.

Satz 2.5 (Vollständigkeit der Lebesgue–Räume)
Sei (X, μ) ein Maßraum und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(X;\mu)$ ein linearer Raum, welcher vermöge $\|\cdot\|_p$ zu einem Banach–Raum wird.
Insbesondere sind also $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$ und $\big(\ell^p, \|\cdot\|_p\big)$ Banach–Räume.

Zum Beweis dieser Aussage benötigt man das folgende. [b]

Lemma 2.6

[b] Die Hölder–Ungleichung gilt auch mit den Wahlen $p = \infty$ und $q = 1$ (mit der Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$). Dies wird später klar, wenn wir den Raum $L^\infty(X;\mu)$ erklärt haben. Entsprechendes gilt für die Minkowski–Ungleichung.

i) **(Hölder–Ungleichung)**
Seien $1 < p, q < \infty$ konjugierte Exponenten, d. h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (also $q = \frac{p}{p-1}$), und seien $u \in L^p(X;\mu)$ sowie $w \in L^q(X;\mu)$. Dann ist $uw \in L^1(X;\mu)$ und es gilt

$$\int_X |uw|\, d\mu(x) \leq \|u\|_p \, \|w\|_q.$$

ii) **(Minkowski–Ungleichung)**
Sei $1 \leq p < \infty$ und seien $u, w \in L^p(X;\mu)$. Dann ist auch $u + w \in L^p(X;\mu)$ und es gilt

$$\|u + w\|_p \leq \|u\|_p + \|w\|_p.$$

Beweis.

i) Seien $s, t, \alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta = 1$. Wegen der Konkavität des Logarithmus ist dann (vgl. Fig. 2)

$$\log(\alpha s + \beta t) \geq \alpha \log s + \beta \log t,$$

also $\alpha s + \beta t \geq s^\alpha \, t^\beta$.

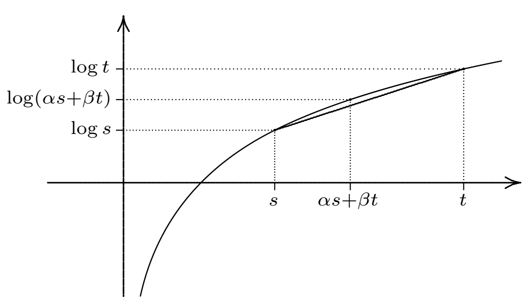

Fig. 2

Sind nun die konjugierten Exponenten $\alpha := \frac{1}{p}$ und $\beta := \frac{1}{q}$ und wählen wir $s := x^{1/\alpha}$, $t := y^{1/\beta}$ mit $x, y > 0$, so erhalten wir die Ungleichung:

$$xy \leq \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q. \qquad (0.1)$$

Natürlich gilt (0.1) trivialerweise, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist. Seien nun $\|u\|_p, \|w\|_q > 0$ (sonst ist die Behauptung trivial). Wir setzen nun $x := \frac{|u|}{\|u\|_p}$ und $y := \frac{|w|}{\|w\|_q}$ und gelangen mit (0.1) zu

$$\frac{|u|}{\|u\|_p} \, \frac{|w|}{\|w\|_q} \leq \frac{1}{p} \, \frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q} \, \frac{|w|^q}{\|w\|_q^q} \quad \mu\text{–f. ü. auf } X,$$

und Integration über X liefert

$$\frac{1}{\|u\|_p}\frac{1}{\|w\|_q}\int_X |uw|\,d\mu \le \frac{1}{p}\frac{1}{\|u\|_p^p}\int_X |u|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\frac{1}{\|w\|_q^q}\int_X |w|^q\,d\mu = 1,$$

und damit die Behauptung.

ii) Der Fall $p = 1$ ist offensichtlich. Sei also $p > 1$ und $q := \frac{p}{p-1}$ (d. h. p und q sind konjugierte Exponenten). Wir zeigen zunächst, dass $|u+w|^p$ integrierbar, also $u + w \in L^p(X;\mu)$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}|u+w|^p &\le \big(|u|+|w|\big)^p \le \big(2\max\{|u|,|w|\}\big)^p\\ &= 2^p\max\{|u|^p,|w|^p\} \le 2^p\big(|u|^p+|w|^p\big),\end{aligned}$$

wobei Repräsentanten für u und w gewählt, und das Maximum punktweise gebildet wurde, d. h. die Ungleichungen gelten μ–f. ü. auf X. Damit ist

$$\int_X |u+w|^p\,d\mu \le 2^p\left(\int_X |u|^p\,d\mu + \int_X |w|^p\,d\mu\right),$$

also $u + w \in L^p(X;\mu)$ gezeigt. Nun wird mit i)

$$\begin{aligned}\|u+w\|_p^p &= \int_X |u+w|^p\,d\mu = \int_X |u+w|^{p-1}|u+w|\,d\mu\\ &\le \int_X |u||u+w|^{p-1}\,d\mu + \int_X |w||u+w|^{p-1}\,d\mu\\ &\le \|u\|_p\left(\int_X |u+w|^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|w\|_p\left(\int_X |u+w|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \big(\|u\|_p+\|w\|_p\big)\|u+w\|_p^{\frac{p}{q}},\end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $\|u+w\|_p > 0$ unmittelbar folgt (sonst gilt das Behauptete trivialerweise). □

Beweis von Satz 2.5.

Sei $u \in L^p(X;\mu)$. Ist $\|u\|_p = 0$, so ist $u \equiv 0$ (genauer: $[u] = 0$). Ferner ist $\|cu\|_p = |c|\|u\|_p$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und wegen Lemma 2.6 ii) gilt die Dreiecksungleichung, d. h. $L^p(X;\mu)$ wird vermöge $\|\cdot\|_p$ zu einem normierten Raum.
Sei dazu $(u_n) \subset L^p(X;\mu)$ eine Cauchy–Folge bzgl. $\|\cdot\|_p$. Dann genügt es zu zeigen, dass eine Teilfolge $\big(u_{n_k}\big)_k$ von (u_n) gegen eine Funktion $u \in L^p(X;\mu)$ konvergiert. Denn eine Cauchy–Folge mit konvergenter Teilfolge ist bereits selbst

konvergent:

$$\|u_n - u\|_p \le \|u_{n_k} - u\|_p + \|u_{n_k} - u_n\|_p \xrightarrow{k} 0.$$

Wegen der Cauchy–Bedingung für (u_n) gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}, N_k \ge k$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|u_{N_{k+1}} - u_{N_k}\right\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1. \tag{0.2}$$

Setzen wir $\widetilde{u}_k := u_{N_k}$ und $\omega_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} |\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k|$ für $\nu \in \mathbb{N}$, so ist wegen (0.2) $\|\omega_\nu\|_p \le 1$. Nach dem Lemma von Fatou ist dann

$$\int_X |\lim_\nu \omega_\nu|^p \, d\mu \le \liminf_\nu \int_X |\omega_\nu|^p \, d\mu = \liminf_\nu \|\omega_\nu\|_p^p \le 1,$$

d. h. $\lim_\nu \omega_\nu$ existiert für μ–f. a. $x \in X$. Damit haben wir

$$\left|\widetilde{u}_k(x) - \widetilde{u}_l(x)\right| \le \sum_{\nu=l}^{k} \left|\widetilde{u}_{\nu+1}(x) - \widetilde{u}_\nu(x)\right| \xrightarrow{k,l} 0 \quad \text{für } \mu\text{–f. a. } x \in X,$$

weshalb also $(\widetilde{u}_k)$ für μ–f. a. $x \in X$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ ist. Die punktweise Grenzfunktion $u(x) := \lim_k \widetilde{u}_k(x)$ existiert für μ–f. a. $x \in X$ ($[u]$ ist dadurch wohldefiniert). Bleibt zu zeigen, dass $u \in L^p(X;\mu)$ ist. Wieder unter Verwendung des Lemmas von Fatou erhalten wir aus der punktweisen Konvergenz von (w_k):

$$\begin{aligned}
\int_X |u - \widetilde{u}_\nu|^p \, d\mu &= \int_X \lim_k |\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu|^p \, d\mu \le \liminf_k \int_X |\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu|^p \, d\mu \\
&= \liminf_k \|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu\|_p^p = \left(\liminf_k \|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu\|_p\right)^p \\
&\le \left(\liminf_k \sum_{j=\nu}^{k-1} \|\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{u}_j\|_p\right)^p \overset{(0.2)}{\le} \left(\sum_{j=\nu}^{\infty} 2^{-j}\right)^p \xrightarrow{\nu} 0,
\end{aligned}$$

ergo $u - \widetilde{u}_\nu \in L^p(X;\mu)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$, und damit auch $u \in L^p(X;\mu)$. Außerdem gilt $\widetilde{u}_\nu \to u$ in $L^p(X;\mu)$. □

Unmittelbar aus der soeben durchgeführten Konstruktion ergibt sich:

Korollar 2.7 (Punktweise Konvergenz fast überall)
Seien $1 \le p < \infty$ und $(u_n) \subset L^p(X;\mu)$ eine Folge mit $u_n \xrightarrow{n}: u$ in $L^p(X;\mu)$. Dann gibt es eine Teilfolge von (u_n) (o. E. (u_n) selbst) derart, dass (nach Wahl eines Vertreters) gilt: $u_n(x) \xrightarrow{n} u(x)$ für μ–f. a. $x \in X$.

Außerdem sehen wir

Korollar 2.8 (Hilbertraum)
Der Raum $L^2(X;\mu)$ ist, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega uv \, d\mu,$$

ein Hilbertraum.

L^p–Konvergenz impliziert also punktweise Konvergenz fast überall (wenigstens) für eine Teilfolge für „geeignete“ Vetreter. Dabei bedeutet „geeignet“, dass man für jedes Folgenglied und auch für die Grenzfunktion einen beliebigen Repräsentanten zu wählen hat. Es ist demnach allgemein falsch, dass die Folge selbst punktweise f. ü. konvergiert.

Bemerkung.
Ist $\mu(X) < \infty$, so ist $L^p(X;\mu) \supset L^q(X;\mu)$ für alle $1 \le p \le q \le \infty$ und es gilt in diesem Fall

$$\|u\|_p \le \|u\|_q \, \mu(X)^{1/p-1/q}.$$

Man überlege sich etwa für $X = \mathbb{R}$ und $\mu = \mathcal{L}^1$ Beispiele die zeigen, dass $\mu(X) < \infty$ keine unnötige Voraussetzung ist (vgl. auch A. 2 b)).

Folgender Satz zeigt, dass sich jede L^p-Funktion durch eine Folge glatter Funktionen approximieren lässt (für einen Beweis sei auf GdV Kap 2 verwiesen).

Satz 2.9 (Dichtheit von $C_\circ^\infty$ in L^p)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $1 \le p < \infty$. Dann liegt der Raum $C_\circ^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, d. h. zu jeder Funktion $u \in L^p(\Omega)$ gibt es eine Folge $(\eta_n) \subset C_\circ^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_n \xrightarrow{n} u$ in $L^p(\Omega)$ gilt.

Zum Abschluss unseres Exkurses über L^p-Räume führen wir noch lokale sowie vektorielle Versionen ein, sowie das überaus wichtige Fundamentallemma der Variationsrechnung. Dieses wird uns in § 5 zu einem verallgemeinerten Ableitungsbegriff für L^p–Funktionen führen.

Definition 2.10 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, und $1 \le p \le \infty$. Wir definieren $L^p_{loc}(\Omega)$ als Menge der $\mathcal{L}^d$–f. ü. auf Ω eindeutig definierten Funktionen $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$u \in L^p(\omega) \quad \textit{für alle} \quad \omega \Subset \Omega.$$

Zur Erinnerung: $\omega \Subset \Omega$ *bedeutet, dass* $\overline{\omega}$ *kompakte Teilmenge von* Ω *ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion* $u(x) = 1/x$ *mit* $\Omega = (0,1)$*. Dann gehört* u *zur Klasse* $L^1_{loc}(\Omega)$ *aber nicht zu* $L^1(\Omega)$*.*
(Natürlich lassen sich analog auch lokale Versionen von $L^p(X;\mu)$ *definieren, wenn* (X,μ) *ein Maßraum mit einem normierten (oder auch nur topologischen) Raum* X *ist.)*
Für vektorwertige Funktionen $u := (u^1,\dots,u^D) : \Omega \to \mathbb{R}^D$ $(D \in \mathbb{N})$ *definieren wir:*

$$L^p(\Omega)^D := L^p(\Omega,\mathbb{R}^D) := \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R}^D;\ u^\nu \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \nu = 1,\dots,D\Big\}$$

und versehen diesen Raum mit der Norm:

$$\|u\|_p := \|u\|_{\Omega;p} := \left(\sum_{\nu=1}^{D} \left\|u^\nu\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Selbstredend übertragen sich alle Eigenschaften der Räume $L^p(\Omega)$ *auf die vektoriellen Versionen (Vollständigkeit, Hölder–Ungleichung, ...). Schließlich kann man auch hier noch lokale Versionen* $L^p_{loc}(\Omega)^D = L^p_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^D)$ *einführen.* [c]

Lemma 2.11 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *erfülle*

$$\int_\Omega u(x)\eta(x)\,dx = 0 \quad \text{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega). \tag{0.3}$$

Dann ist $u \equiv 0$*; genauer ist* $u = 0$ *f. ü. auf* Ω*. Ist dagegen*

$$\int_\Omega u(x)\eta(x)\,dx \geq 0 \quad \text{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega), \eta \geq 0,$$

so ist $u \geq 0$ *f. ü. auf* Ω*.*

Bemerkung.
Für die erste Aussage in Lem. 2.11 gibt es Pendants für Funktionen $u \in L^p_{loc}(\Omega)^D$*.*

Durch das Konzept der Äquivalenzklassenbildung ist es uns gelungen Banach- und Hilberträume bestehend aus Funktionen zu konstruieren zusammen mit einer integralen Norm. Zur Uutersuchug von Differentialgleichungen müssen wir jedoch mit differenzierbaren Funktionen arbeiten. Daher wollen wir nun

[c] In der Literatur finden sich auch die Bezeichnungen $L_p(\Omega)$, $L_p^{loc}(\Omega)$ sowie entsprechende Notationen für die vektoriellen Versionen.

das Konzept der schwachen Ableitug einführen. Hierbei werden wir von einem punktweisen Verständnis der Differenzierbarkeit abkommen.

Das folgende Konzept der „schwachen Ableitung" ist begrifflich am einfachsten zu verstehen. Seien $u \in C^1(\Omega)$, $w_\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1, \dots, d\}$, so dass gilt:

$$\int_\Omega u\,\partial_\gamma \eta\,dx = -\int_\Omega w_\gamma \eta\,dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega). \tag{0.4}$$

Partielle Integration liefert dann:

$$\int_\Omega \partial_\gamma u\,\eta\,dx = \int_\Omega w_\gamma \eta\,dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega).$$

Also ist nach dem Fundamentallemma 2.11 $w_\gamma = \partial_\gamma u$. Die linke Seite von (0.4) macht auch für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ Sinn, und motiviert die folgende Definiton.

Definition 2.12 (Schwache Differenzierbarkeit)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und $k \in \mathbb{N}_0$, und seien $u, w^\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann heißt w^γ die γ–te schwache (partielle) Ableitung von u, falls gilt

$$\int_\Omega u\,\partial^\gamma \eta\,dx = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega w^\gamma \eta\,dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega); \tag{0.5}$$

u heißt k–mal schwach differenzierbar *auf Ω, falls für jedes $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$ eine Funktion $w^\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$, welche der Beziehung (0.5) genügt, existiert. Den Raum aller k–mal auf Ω schwach differenzierbaren Funktionen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ bezeichnen wir mit $W^k(\Omega)$. Insbesondere sei $W^0(\Omega) := L^1_{loc}(\Omega)$.*

Bemerkung 2.13

i) In Definition 2.12 genügt es zu verlangen, dass (0.5) für alle Funktionen $\eta \in C^{|\gamma|}_\circ(\Omega)$ gilt. Ferner lassen sich die obigen Konzepte auch in L^p_{loc} statt L^1_{loc} sowie für vektorwertige Funktionen (komponentenweise) formulieren. Die entsprechenden Räume vektorieller, schwach differenzierbarer Funktionen bezeichnen wir wie üblich mit $W^k(\Omega)^D = W^k(\Omega, \mathbb{R}^D)$. Die Eigenschaften der skalaren Räume $W^k(\Omega)$ übertragen sich sinngemäß auf $W^k(\Omega)^D$.

ii) Per Definition ist $W^k(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, d. h. schwach differenzierbare Funktionen sind Äquivalenzklassen $\mathcal{L}^d$–messbarer Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$. Zu $u \in W^k(\Omega)$ gibt es höchstens einen stetigen Vertreter (die Gleichheit in Ω bis auf eine Nullmenge stetiger Funktionen impliziert Gleichheit überall in

Ω). Allgemein haben schwach differenzierbare Funktionen keine stetigen Vertreter (vgl. Übung).

iii) Hat $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine $|\gamma|$–te schwache Ableitung w^γ, so ist diese nach dem Fundamentallemma 2.11 eindeutig bestimmt, und man schreibt wie üblich wieder $\partial^\gamma u$ statt w^γ, sofern sich die genaue Bedeutung von $\partial^\gamma u$ aus dem Kontext erschließt. Ebenso verwendet man alle anderen Bezeichnungen aus der klassischen Differentialrechnung für schwach differenzierbare Funktionen.

iv) Es ist $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$, und die schwachen Ableitungen einer C^k–Funktion stimmen mit den klassischen Ableitungen überein (bzw. werden von jenen erzeugt).

v) Eine Funktion u gehört genau dann zur Klasse $W^1(\Omega)$, falls gilt:

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \eta \, dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \eta \, dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega)^d.$$

Entsprechend ist $u \in W^1(\Omega)^D$, falls gilt:

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \eta \, dx = - \int_\Omega \nabla u : \eta \, dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega)^{dD}.$$

Dabei bezeichnet für $w := (w_\nu)_{\nu=1,\dots,D}$ jetzt ∇w die (schwache) Jacobi–Matrix $\big(\partial_\gamma w^\nu\big)_{\substack{\gamma=1,\dots,d\\ \nu=1,\dots,D}} \in \mathbb{R}^{d\times D} \cong \mathbb{R}^{dD}$ und $\operatorname{div} w$ steht für die (schwache) vektorielle Divergenz:

$$\operatorname{div} w := \left(\sum_{\gamma=1}^{d} \operatorname{div} w^\nu \right)_{\nu=1,\dots,D} \in \mathbb{R}^D.$$

vi) Es gibt Funktionen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, die weder klassisch noch schwach differenzierbar sind. Einfache Beispiele liefern charakteristische Funktionen.

Beispiel 2.14

Funktion mit $u \in C^1\big(\Omega \setminus \{\xi\}\big)$. Dann ist i. a. sowohl $u \notin L^1_{loc}(\Omega)$ als auch $\nabla u \notin L^1_{loc}(\Omega)^d$, wobei ∇u die auf $\Omega \setminus \{\xi\}$ existierende klassische Ableitung von u bezeichnet. Ferner braucht eine bis auf eine Stelle stetig differenzierbare Funktion auch nicht in $W^1(\Omega)$ zu sein (siehe Übung).

Wir demonstrieren dies an dem folgenden Beispiel.
Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit genügend glattem Rand und mit $0 \in \Omega$

sowie $s \in \mathbb{R}$ *sei* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *gegeben durch*

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^s} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0. \end{cases} \tag{0.6}$$

Dann ist $u \in C^1\big(\Omega \setminus \{0\}\big)$ *mit klassischer Ableitung* $\nabla u(x) = -\frac{sx}{|x|^{s+2}}$ *für alle* $x \in \Omega \setminus \{0\}$. *Falls* $s < d$ *ist, ist* $u \in L^1(\Omega)$, *und falls* $s < d-1$ *ist, ist auch* $\nabla u \in L^1(\Omega)^d$.

Lemma 2.15
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $\xi \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ *und* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *gegeben durch*

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x-\xi|^s} & ; \quad x \neq \xi \\ 0 & ; \quad x = \xi. \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ *gilt dann:*

$$u \in W^k(\Omega) \quad \iff \quad s < d - k.$$

Wir geben im folgenden noch zwei äquivalente Charakterisierungen der schwachen Differenzierbarkeit an.

Satz 2.16 (Schwache Ableitung)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $\gamma \in \{1, \dots, d\}$ *und* $u, w \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Dann sind äquivalent:*

i) w *ist die* γ*–te schwache (partielle) Ableitung von* u *auf* Ω, *also* $w = \partial_\gamma u$.

ii) Es gibt eine Folge $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ *mit*

$$u_n \xrightarrow{n} u \quad \text{und} \quad \partial_\gamma u_n \xrightarrow{n} w \ \text{in} \ L^1_{loc}(\Omega).$$

iii) Für $0 < |h| \ll 1$ *ist* $\Delta^h_\gamma u$ $\mathcal{L}^d$*–f. ü. in* Ω *definiert und es strebt*

$$\Delta^h_\gamma u \xrightarrow{h \to 0} w \ \text{in} \ L^1_{loc}(\Omega).$$

Bemerkung 2.17

i) Nach Satz 2.16 ist eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *genau dann in* $W^1(\Omega)$, *wenn eine der gleichwertigen Bedingungen ii) oder iii) aus dem Satz erfüllt ist.*

ii) Analoge Aussagen gelten auch für höhere schwache Ableitungen.

Bemerkung 2.18

Natürlich kann man die Begriffsbildungen in diesem § — wie teilweise schon erwähnt — sinngemäß auf vektorwertige Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^D$ übertragen. Insbesondere gelten die oben gemachten Aussagen über die schwache Differenzierbarkeit auch für Funktionen $u \in W^k(\Omega)^D$.

Schließlich wollen wir die schwach differenzierbaren Funktionen zu geeiognеten normierten Räume zusammenfassen und deren Eigenschaften kennenlernen. Insbesondere sei daran erinnert, dass wir an einem Hilbertraum interessiert sind.

Die Räume $W^k(\Omega)$ der k–mal auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ schwach differenzierbaren Funktionen, die wir kennengelernt haben, sind ersichtlich lineare Räume. In Folgenden wird es darum gehen, geeignete Unterräume auszuwählen, die wir mit einer vollständigen Norm versehen können. Dies geht so, dass man von Funktionen und ihren schwachen Ableitungen (bis zur Ordnung k) die Zugehörigkeit zu den Räumen $L^p(\Omega)$ mit einem $p \in [1, \infty)$ verlangt.

Definition 2.19 (Sobolev–Raum)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt der lineare Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{ u \in W^k(\Omega);\ \partial^\gamma u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^k \text{ mit } |\gamma| \le k \Big\}$$

der Sobolev–Raum mit Differenzierbarkeitsstufe k und Integrabilitätsexponent p. (Insbesondere ist $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.) Auf $W^{k,p}(\Omega)$ betrachtet man für $1 \le p < \infty$ die Norm:

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_{\Omega;k,p} := \left(\sum_{|\gamma| \le k} \left\| \partial^\gamma u \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Die Elemente von $W^{k,p}(\Omega)$ heißen Sobolev–Funktionen. [d]

Bemerkung 2.20

i) Dass durch $\| \cdot \|_{k,p}$ tatsächlich eine Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ erklärt ist, zeigen einfache Rechnungen.

[d] Man erinnere sich daran, dass es sich bei den Elementen von $W^{k,p}(\Omega)$, die ja insbesondere Elemente von $L^1(\Omega)$ sind, eigentlich nicht um Funktionen, sondern um Äquivalenzklassen von Funktionen handelt. In der Literatur findet man häufig auch die Bezeichnungen $W_p^k(\Omega)$, $H^{k,p}(\Omega)$ oder $H_p^k(\Omega)$. Ferner werden die Räume $W^{k,2}(\Omega)$ auch häufig mit $H^k(\Omega)$ bezeichnet, weil diese dadurch ausgezeichnet sind, dass sie Hilbert–Raum sind (s. u.).

ii) Zu $\|\cdot\|_{k,p}$ äquivalente Normen auf $W^{k,p}(\Omega)$ werden gegeben durch:

$$\sum_{|\gamma|\le k} \left\|\partial^\gamma u\right\|_p \quad \textit{bzw.} \quad \max_{|\gamma|\le k} \left\|\partial^\gamma u\right\|_p$$

für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ (mit $1 \le p \le \infty$). Betrachet man die dadurch erklärten Normen, so ändern sich Konvergenzaussagen, Vollständigkeit oder andere topologische Begriffe natürlich nicht. Die von uns bevorzugte Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ hat den entscheidenden Vorteil, dass sie für $p = 2$ von dem durch

$$\langle u, v\rangle_k := \langle u, v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\le k} \int_\Omega \partial^\gamma u\, \partial^\gamma v\, dx$$

gegebenen Skalarprodukt auf $W^{k,2}(\Omega)$ herrührt.

Wir führen noch die folgende Bezeichnung ein, die uns später zum „Randverhalten“ von Sobolev–Funktionen führen wird. Zunächst ist völlig unklar, ob und wie man Sobolev–Funktionen „Randwerte“ zuordnen soll.

Definition 2.21

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnen wir mit $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ den Normabschluss des Raumes $C_\circ^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ (also den Abschluss bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{k,p}$):

$$\mathring{W}^{k,p}(\Omega) := \overline{C_\circ^\infty(\Omega)}^{\,\|\cdot\|_{k,p}},$$

d. h. es ist $u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn es eine Folge $(\eta_n) \subset C_\circ^\infty(\Omega)$ gibt mit

$$\partial^\gamma \eta_n \xrightarrow{n} \partial^\gamma u \ \textit{in } L^p(\Omega)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$. [e]

Man kann zeigen, dass wie erwartet $\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ und $\mathring{W}^{0,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ist; ferner ist $\mathring{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) = W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Entsprechend zu den Lebesgue–Räumen, erklären wir auch für die Sobolev–Räume lokale sowie vektorielle Versionen: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann setzt man:

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) := \Big\{ u \in W^k(\Omega);\ \partial^\gamma u \in L^p_{loc}(\Omega) \textit{ für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^k \textit{ mit } |\gamma| \le k \Big\}.$$ [f]

[e] In der Literatur findet man häufig auch die Bezeichnungen $\mathring{W}^k_p(\Omega)$, $W^{k,p}_\circ(\Omega)$, $W^k_{p\,\circ}(\Omega)$ sowie entsprechende „H–Notationen“. Ferner sind die Bezeichnungen $\mathring{H}^k(\Omega)$ bzw. $H^k_\circ(\Omega)$ für die Hilbert–Räume $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$ gebräuchlich.

[f] Auch hier sind andere Bezeichnungen gebräulich: $W^k_{p,loc}(\Omega)$ bzw. entsprechende „H–Notationen“.

Für vektorwertige Funktionen $u := (u^1, \ldots, u^D) : \Omega \to \mathbb{R}^D$ $(D \in \mathbb{N})$ *definieren wir:*

$$W^{k,p}(\Omega)^D := W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^D) := \left\{ u \in L^p(\Omega)^D; \quad \begin{matrix} u^\nu \in W^{k,p}(\Omega) \text{ für alle} \\ \nu = 1, \ldots, D \end{matrix} \right\}$$

und versehen diesen Raum mit der Norm:

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_{\Omega;k,p} := \left(\sum_{\nu=1}^{D} \|u^\nu\|_{k,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Schließlich erklärt man wie oben auch noch lokale Versionen $W^{k,p}_{loc}(\Omega)^D$ *der Räume* $W^{k,p}(\Omega)^D$ *sowie den Raum* $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)^D$. *(Wie dies im Detail auszusehen hat, dürfte ersichtlich sein).*

Satz 2.22
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $1 \le p \le q < \infty$ *und* $k, l \in \mathbb{N}_0$ *mit* $k \ge l$. *Dann gilt:*

i) Die Einbettugen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sind linear und stetig.

ii) Ist $\mathcal{L}^d(\Omega) < \infty$, *so ist die Einbettung*

$$W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$$

stetig.

iii) Für $p < \infty$ *liegt* $W^{k,p}(\Omega)$ *(bzgl. der Norm* $\|\cdot\|_p$*) dicht in* $L^p(\Omega)$.

Beweis.
Die Aussage i) ist völlig trivial; bei der zweiten Einbettung „vergisst“ man einfach, dass die Funktionen auch schwache Ableitungen in $L^p(\Omega)$ *besitzen. Die Aussage in ii) folgt sofort aus der Hölder–Ungleichung (Lem. 2.6 i)). Bleibt iii) nachzuweisen: Nach Satz 2.9 liegt sogar* $C^\infty_\circ(\Omega)$ *dicht in* $L^p(\Omega)$, *aus*

$$C^\infty_\circ(\Omega) \subset \mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

folgt dann natürlich die Dichtheit von $W^{k,p}(\Omega)$ *in* $L^p(\Omega)$. □

Mit der Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ $(p < \infty)$ *aus dem obigen Satz läßt sich nichts anfangen, da* $W^{k,p}(\Omega)$ *gem. Teil iii) von Satz 2.22 kein abgeschlossener Teilraum von* $L^p(\Omega)$ *ist. (Andernfalls folgte ja* $W^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. *Wie wir* *wissen, gibt es aber L^p–Funktionen, die nicht einmal schwach differenzierbar sind.) Andererseits übertragen sich die funktionalanalytischen Eigenschaften eines normierten Raumes (hier L^p) nur auf abgeschlossene Unterräume. Aus diesem Grund konstruieren wir eine andere Einbettung für $W^{k,p}(\Omega)$, welche den Ableitungseigenschaften Rechnung trägt: Seien $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ fixiert. Für*

$$D := \sharp\big\{\gamma \in \mathbb{N}_0^d;\ |\gamma| \leq k\big\} \tag{0.7}$$

definieren wir eine Einbettung $\Phi : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^D$ durch

$$\Phi u := \big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma|\leq k}, \tag{0.8}$$

wobei $\big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma|\leq k}$ o. E. in Zeilenform angeordnet sei. Für $k = 1$ hat man dann beispielsweise

$$\Phi u = \big(u, \partial_1 u, \ldots, \partial_d u\big) = \big(u, \nabla u\big).$$

Offenbar ist $\|u\|_{k,p} = \|\Phi u\|_p$ für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$, und es gilt:

Satz 2.23

Die durch (0.8) definierte Einbettung $\Phi : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)^D$ ist eine lineare Isometrie und der Unterraum $W^{k,p}(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^p(\Omega)^D$.

Beweis.

Bis auf die Abgeschlossenheit sind alle Aussagen trivial. Wir zeigen diese exemplarisch für $k = 1$ und überlassen dem Leser den allgemeinen Fall. Sei also $(u_m) \subset W^{1,p}(\Omega)$ eine Folge, so dass $\Phi u_m = (u_m, \nabla u_m)$ in $L^p(\Omega)^{1+d}$ konvergiert, also

$$u_m \xrightarrow{m}: u \text{ in } L^p(\Omega) \quad \text{und} \quad \nabla u_m \xrightarrow{m}: v \text{ in } L^p(\Omega)^d$$

mit Funktionen $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^p(\Omega)^d$. Wir müssen zeigen, dass wieder $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ist. Offensichtlich muss dann gerade $\nabla u = v$ erfüllt sein. Sei dazu $\eta \in C_\circ^\infty(\Omega)^d$ beliebig. Dann ist

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \eta \, dx = \lim_m \int_\Omega u_m \operatorname{div} \eta \, dx = -\lim_m \int_\Omega \nabla u_m \cdot \eta \, dx = -\int_\Omega v \cdot \eta \, dx,$$

also ist u schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $\nabla u = v$, womit die Behauptung folgt. □

Damit übertragen sich nun die funktionalanalytischen Eigenschaften des Raumes $L^p(\Omega)^D$ (mit D wie in (0.7)) auf den Raum $W^{k,p}(\Omega)$. Man bekommt:

Korollar 2.24

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banach–Raum (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{k,p}$). Ferner sind $W^{k,2}(\Omega)$ sowie $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$ Hilbert–Räume bzgl. dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ aus Bem. 2.20.

Ein nützliches Kriterium um zu erkennen ob eine Funktion in einem bestimmten Sobolev-Raum liegt ergeibt der folgende Satz.

Satz 2.25 (Differenzenquotienten)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 < p < \infty$, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1,\ldots,d\}$. Dann sind äquivalent:

i) Die γ–te schwache Ableitung $\partial_\gamma u$ von u ist von der Klasse $L^p_{loc}(\Omega)$ (bzw. von der Klasse $L^p(\Omega)$).

ii) Für jedes $\omega \Subset \Omega$ gilt:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq c \quad \text{für alle} \quad h \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ mit } |h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$$

mit einer Konstante $c = c(\omega) > 0$ (bzw. mit einer von ω unabhängigen Konstante $c > 0$).

In diesem Fall gilt die Abschätzung:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}},$$

für jedes $\omega \Subset \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\omega,\partial\Omega)$, und es strebt

$$\Delta^h_\gamma u \xrightarrow{h\searrow 0} \partial_\gamma u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega). \tag{0.9}$$

Offenbar ist $W^{k,p} \subset L^p$. Diese Aussage lässt sich jedoch deutlich verbessern, weshalb wir Einbettungen zwischen Lebesgue- und Sobolev-Räumen studieren. Unter einer Einbettung versteht man eine Abbildung $j : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $X \subset Y$ und $j(x) = x \in Y$. Uns interessieren Einbettungen, die stetig oder kompakt sind:

- *Eine Einbettung heißt stetig, falls $\|j(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt;*
- *Eine Einbettung heißt kompakt, falls beschränkte Folgen (x_n) vermöge j auf kompakte Folgen abgebildet werden (d.h. $(j(x_n))$ hat eine in Y konvergente Teilfolge, falls (x_n) in X beschränkt ist).*

Folgender Einbettungssatz ist für die Regularitätstheorie von enormer Bedeutug und stellt ein zentrals Werkzeug der Vorlesung dar.

Satz 2.26 (Sobolev) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann sind die Einbettungen*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d,\, \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

stetig, d. h. für $c(d,p) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{dp}{d-p}} &\leq c(d,p)\,\|\nabla u\|_p & ;\quad p < d \\ \sup_\Omega |u| &\leq c(d,p)\,\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}}\|\nabla u\|_p & ;\quad p > d \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Offenbar sind dann auf dem Raum $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ die Normen $\|u\|_{1,p}$ und

$$\|u\|_{\mathring{W}^{1,p}} := \|\nabla u\|_p$$

äquivalent. Man arbeitet daher auf diesem Raum mit letzterer Norm. Insbesondere gilt.

Korollar 2.27 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Der Raum $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ist versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

ein Hilbertraum

Korollar 2.28 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt*

$$\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0,\, 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p},\, \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

(beachte: im zweiten Fall muss gelten $k - \frac{d}{p} > 0 \;\Rightarrow\; kp > n$).

Falls der Rand $\partial\Omega$ von Ω „vernünftig“ ist gelten bei beschränkten Geibieten auch entsprechende Einbettungen für die $W^{k,p}$-Räume.

Satz 2.29 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann sind die Einbettungen*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d \end{cases}$$

stetig, d. h. für $c(d,p,\Omega) > 0$ gilt

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq c(d,p,\Omega)\,\|u\|_{1,p} \quad ; \quad p < d$$

$$\sup_{\Omega} |u| \leq c(d,p,\Omega)\,\|u\|_{1,p} \quad ; \quad p > d$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Korollar 2.30 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p},\ kp > d \end{cases}$$

Interessant ist schließlich noch folgende Frage: ist eine Folge in $W^{k,p}$ beschränkt, so lässt sich i.a. keine konvergente Teilfolge auswählen, da der Satz von Bolzano-Weierstraß nur in endlich-dimensionalen Räumen gilt. Eine schwächere Aussage ist allerdings richtig, wie der folgende Satz zeigt.

Definition 2.31 *Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetig linearer Operator. T heißt kompakt, falls für jede in X beschränkte Folge (x_n) die Folge (Tx_n) eine (in Y) konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 2.32 (Rellich-Kondrachov) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $1 \leq p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega) \quad \text{für alle } t < \frac{pd}{d-p}$$

kompakt.

Bemerkung 2.33 *a) Man beachte, dass die obere Grenze der Exponenten, für die man kompakte Einbettungen bekommt, gerade der Sobolev-Exponent ist.*

b) Iterativ erhält man die Kompaktheit der Einbettung $\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset L^t(\Omega)$ für alle $t < \frac{dp}{d-kp}$.

c) Wie in Satz 2.29 gelten auch hier analoge Aussagen für die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit Lipschitz-Rand im Fall einer beschränkten Menge Ω.

Bisher haben wir Randwerte von Sobolev-Funktionen im folgenden Sinn interpretiert: $u = u_0$ auf $\partial\Omega$ genau dann, wenn $u - u_0 \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, wobei $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. Wir werden zum Ende dieses Kapitel eine präzisere Definition von Randwerten erarbeiten und sehen, dass diese mit der uns gewohnten übereinstimmt.

Notwendig dazu ist ein "vernünftiger"Rand $\partial\Omega$ von Ω. Unter allgemeinen Bedingungen ist die Aussage falsch. Einen Beweis findet man in [Ad], Thm. 3.18.

Satz 2.34 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und genüge einer inneren Kegelbedingung. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$: $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Bemerkung 2.35 *a) Eine innere Kegelbedingung bedeutet, dass es EINEN Kegel gibt, der in JEDEM Randpunkt so angelegt werden kann, dass der gesamte Kegel in Ω liegt. Dies schließt z.B. exponentielle Spitzen aus. Eine innere Kegelbedingung ist unter anderem erfüllt, wenn $\partial\Omega$ ein Lipschitz-Rand ist.*

b) Im Gegensatz zu Satz 1.6 gibt es hier eine Folge (u_m), bestehend aus Funktionen, die bis zum Rand glatt sind mit $\|u_m - u\|_{k,p} \to 0$ bei $m \to \infty$. In Satz in 1.6 erhielt man nur $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Im Folgenden benötigen wir Räume von Funktionen die über den Rand integrierbar sind, d.h. für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen sei $L^p(\partial\Omega)$:= Menge aller $\mathcal{H}^{d-1}$-messbaren Funktionen mit

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |f|^p \, d\mathcal{H}^{d-1} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Für C^1-Funktionen definieren wir den Operator $\mathcal{B} : C^1(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ durch $\mathcal{B}u := u|_{\partial\Omega}$ und erhalten (vgl. [Alt])

Lemma 2.36 *Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(d, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ betrachten wir eine Approximationsfolge $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und $\|u_m - u\|_{1,p} \to 0$, deren Existenz nach Satz 2.35 gewährleistet ist. Aus Lemma 2.36 folgt, dass $(\mathcal{B}u_m)$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\partial\Omega)$. Der Limes dieser Folge, der nich von der speziellen Wahl der Folge abhängt, wird nun als Spur von u bezeichnet.

Definition 2.37 *Der Operator* $\mathcal{B} \to W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *(*$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand,* $1 \leq p < \infty$*) mit* $\mathcal{B}u := L^p(\partial\Omega)$*-Limes von* $u_m|_{\partial\Omega}$ *(*(u_m) *Approximationsfolge zu* u*) heißt Spur-Operator.*

Bemerkung 2.38 *Es lässt sich zeigen (vgl. [Mo], Thm. 3.6.3), dass* $\mathcal{B}u$ *für* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *die klassische Spur von* u *auf* $\partial\Omega$ *ist.*

Der folgende Satz zeigt nun die Äquivalenz der beiden Randwert-Begriffe.

Satz 2.39 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt mit Lipschtz-Rand. Dann gilt für* $1 \leq p < \infty$

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathcal{B}u = 0 \right\}.$$

§ 3. Das klassische Stokes-Problem

Ziel dieses Kapitels ist die Entwicklung einer Existenztheorie für das klassische Stokes-Problem, welches den langsamen Fluss eines Newtonschen Fluids beschreibt. Der Rieszsche Darstellungssatz in einem geeigneten Hilbertraum führt uns auf die Existenz einer schwachen Lösung, während Argumente der Regularitätstheorie zeigen, dass es sich um ein starke Lösung im klassischen Sinn handelt.

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, und eine Kraft $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Das klassische Stokes Problem liest sich nun als: finde ein Geschwindigkeitsfeld $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Druckfunktion $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \Delta u = \nabla p - f & \text{auf } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{SP}$$

- *Im Gegensatz zu Kapitel 1 haben wir die Viskosität ν und die Dichte ρ der Einfachheit halber auf 1 gesetzt, für die mathematische Untersuchung macht das keinen Unterschied;*
- *unter der Annahme eines langsamen Flusses wurde der Term $(\nabla u)u$ vernachlässigt, das Ergebnis ist eine lineare Gleichung;*
- *wir betrachten Randwerte $u_0 = 0$, später werden wie sehen, dass beliebige Randwerte sehr einfach auf Nullrandwerte zurückgeführt werden können.*

Man erwartet, dass die Lösung (u, p) zur Klasse $C^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \times C^1(\Omega)$ gehört. Dieses Ergebnis lässt sich jedoch nur über einen Umweg erreichen. Wir leiten zunächst die schwache Version der Gleichung (SP) her. Diese hat hat den großen Vorteil, dass wir uns die Eigenschaften der Hilberträume zu Nutze machen können. Außerdem verschwindet die Druckfuntion aus der ersten Gleichung.
Ein wesentliches Hilfsmittel dazu ist der Satz von Gauß.

Satz 3.1 (Gauß) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.*

a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\mathcal{L}^d = \int_{\partial\Omega} u \cdot \mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1},$$

wobei $\mathcal{N}$ die äußere Einheitsnormale and $\partial\Omega$ bezeichnet.

b) Für $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, d\mathcal{L}^d = \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}u \cdot \mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1},$$

wobei $\mathcal{B}u$ die Spur von u bezeichnet.

Wir nehmen an, wir hätten eine Lösung der Gleichung (SP) und multiplizieren mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} \varphi = 0$. Es folgt

$$\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx. \tag{0.1}$$

Wegen $\operatorname{div}(\nabla u \, \varphi) = \Delta u \cdot \varphi + \nabla u : \nabla \varphi$ erhalten wir mit Satz 3.1

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u \, \varphi) \, dx - \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \, \varphi \cdot \mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1} - \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx \\ &= -\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx.\end{aligned}$$

Außerdem ist $\operatorname{div}(p\varphi) = p \operatorname{div} \varphi + \nabla p \cdot \varphi = \nabla p \cdot \varphi$ und damit

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(p\varphi) \, dx = \int_{\partial\Omega} p\varphi \cdot \mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1} = 0.$$

Insgesamt is (0.1) also äquivalent zu

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \tag{0.2}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} \varphi = 0$. Benutzt haben wir allerdings nur die erste Gleichung von (SP). Zusätzlich müssen wir noch $\operatorname{div}(u) = 0$ auf Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ fordern. Dazu definieren wir

$$\mathring{W}^{1,2}_{\operatorname{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d) := \overline{\{v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d) : \ \operatorname{div} v = 0\}}^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \subset \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Offenbar haben Elemente dieses Raums Nullrandwerte und sind auch divergenzfrei. Für unsere Zwecke benötigen wir einen Hilbertraum.

Lemma 3.2 *Der Raum $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ ist ein Hilbertraum zusammen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u,v\rangle := \int_\Omega \nabla u : \nabla v\,dx.$$

Beweis.
Da $(\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d),\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $(\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist genügt der Beweis der folgenden Aussage.

- *abgeschlossene Unterräume von Hilberträumen sind Hilberträume,*

Sei X mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Hilbertraum und Y abgeschlossener Unterraum (man beachte, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch auf Y wohldefiniert ist). Sei (y_n) eine Cauchyfolgen in Y bezüglich der durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm. Dann ist (y_n) auch Cauchyfolge in $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ und damit konvergent in X (da Hilberträume definitionsgemäß vollständig sind). Da Y abgeschlossen in X ist muss der Limes in Y liegen. D.h. jede Cauchy-Folge in Y ist konvergen und damit ist $(Y,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ vollständig, also ein Hilbertraum.

Lemma 3.3 *Für $u\in\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ und $f\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ ist Gleichung (0.2) äquivalent zu*

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\cdot\varphi\,dx \quad \text{für alle } \varphi\in\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d).$$

Beweis.
Nach Definition ist

$$\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d) = \overline{\{v\in C_0^\infty(\Omega,R^d):\ \operatorname{div} v = 0\}}^{\langle\cdot,\cdot\rangle}. \tag{0.3}$$

Zu $\varphi\in\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ gtib es also eine Folge $(\varphi_n)\subset C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div}\varphi_n = 0$ und

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi-\varphi_n)|^2\,dx \longrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

(0.2) ergibt

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi_n\,dx = \int_\Omega f\cdot\varphi_n\,dx.$$

Wir wollen jetzt auf beiden Sieten zur Grenze übergehen. Es gilt da $\nabla u \in$

$L^2(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$

$$\left| \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi_n \, dx - \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx \right| \leq \int_\Omega |\nabla u| |\nabla(\varphi_n - \varphi)| \, dx$$
$$\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0,$$

wobei wir die Ungleichung von Hölder benutzt haben. Außerdem ist wegen $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\left| \int_\Omega f \cdot \varphi_n \, dx - \int_\Omega f \cdot \varphi_n \, dx \right| \leq \int_\Omega |f| |\varphi_n - \varphi| \, dx$$
$$\leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi_n - \varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq c \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0,$$

wobei wir im letzten Schritt die Ungleichung von Sobolev benutt haben (vgl. Satz 2.26). Es folgt

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. □

Wir kommen damit zur schwachen Fomulierung von (SP). Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d). \tag{WSP}$$

Man beachte, dass in dieser Formulierung Tetsfunktionen und Lösung zuer selben Klasse gehören. Außerdem ist die Druckfunktion verschwunden. Im folgenden Satz wird die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung formulier.

Satz 3.4 (Schwache Lösung)
Sei $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Dann existiert genau eine Lösung* $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *von (WSP).*

Definieren wir

$$L_f(\varphi) := \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx,$$

so erhalten wir eine stetige lineare Abbildung von $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$. *Die Ste-*

tigkeit folgt hierbei aus

$$|L_f(\varphi)| = \left| \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \right| \leq \int_\Omega |f||\varphi| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq c \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = C\|\varphi\|.$$

In der letzten Ungleichung wurde der Satz von Sobolev benutzt (vgl. Satz 2.26). Wir können also (WSP) auch lesen als: Finde $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\langle u, \cdot \rangle = L_f.$$

Die Lösung dieses Problems liefert der Satz von Riesz. Die Menge der stetig lineare Abbildungen von einem normierten Raum X *in den Grundkörper* $\mathbb{R}$ *wird im folgenden mit* X^* *bezeichnet.*

Satz 3.5 (Darstellungssatz von Riesz)
Sei $\big(H, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ *ein Hilbert–Raum und sei* $T \in H^*$*. Dann gibt es genau einen Vektor* $u \in H$ *mit*

$$\langle u, \cdot \rangle = T \text{ auf } H \quad \text{und} \quad \|u\| = \|T\|_\infty.$$

Die Abbildung $H \to H^*,\ x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ *ist also ein isometrischer Isomorphismus.*

Bevor wir Satz 3.5 beweisen, formulieren wir folgendes Hilfslemma.

Satz 3.6 (Orthogonalzerlegung, Projektionssatz)
Sei H *ein Hilbert–Raum und* $U \subset H$ *ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist*

$$H = U \oplus U^\perp,$$

d. h. jeder Vektor $x \in H$ *hat eine eindeutige Zerlegung der Form* $x = u + u^\perp$ *mit* $u \in U$ *und* $u^\perp \in U^\perp$*.*

Beweis.
Zunächst beweisen wir: sei $x \in H$*, dann existiert* $u \in U$ *mit* $\|x - u\| = \mathrm{dist}(x, U)$*. Sei* $(u_n) \subset U$ *eine* Minimalfolge*, d. h. es gelte*

$$\|x - u_n\| \xrightarrow{n} \mathrm{dist}(x, U).$$

Wir zeigen, dass (u_n) *konvergiert, indem wir uns überlegen, dass es sich um eine Cauchy–Folge in* H *handelt. Dazu betrachten wir* $v^\pm := \frac{1}{2}\big(u_n \pm u_m\big)$ *für*

$n,m \in \mathbb{N}$. Da U Unterraum ist, ist $v^\pm \in U$, und wir erhalten mittels der Parallelogrammidentität:

$$\begin{aligned}\|x-u_n\|^2+\|x-u_m\|^2 &= \|x-v^+-v^-\|^2+\|x-v^++v^-\|^2\\ &= 2\|x-v^+\|^2+2\|v^-\|^2 = 2\|x-v^+\|^2+\frac{1}{2}\|u_n-u_m\|^2\\ &\geq 2\operatorname{dist}(x,U)^2+\frac{1}{2}\|u_n-u_m\|^2.\end{aligned}$$

Demnach wird

$$\|u_n-u_m\|^2 \leq 2\|x-u_n\|^2+2\|x-u_m\|^2-4\operatorname{dist}(x,U)^2 \xrightarrow{n,m} 0,$$

womit (u_n) also eine Cauchy–Folge in H ist. Wegen der Vollständigkeit von H existiert ein $u \in H$ mit $u = \lim_n u_n$, und da U abgeschlossen ist, ist bereits $u \in U$.
Wir zeigen jetzt $u^\perp := x-u \in U^\perp$. Für alle $t \in \mathbb{R}$, alle $z \in U$ gilt

$$\begin{aligned}\|u^\perp\|^2 = \|x-u\|^2 &\leq \|x-(u+tz)\|^2\\ &= \|u^\perp\|^2 - 2t\langle u^\perp, z\rangle + t^2\|z\|^2.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{2}{t}\langle u^\perp, z\rangle \leq \|z\|^2 \quad \textit{für alle } t>0, z\in U.$$

Ersetzen wir z durch $-z$ so gilt auch

$$-\frac{2}{t}\langle u^\perp, z\rangle \leq \|z\|^2 \quad \textit{für alle } t>0, z\in U.$$

und damit

$$\frac{2}{t}|\langle u^\perp, z\rangle| \leq \|z\|^2 \quad \textit{für alle } t>0, z\in U.$$

Mit $t\to\infty$ erhalten wir $\langle u^\perp, z\rangle = 0$ für alle $z \in U$, d.h. $u^\perp \in U^\perp$. Damit ist $H = U + U^\perp$. Die Direktheit der Summe ist schließlich Konsequenz von $U \cap U^\perp = \{0\}$ ($y \in U\cap U^\perp$, so ist $\langle y,y\rangle = 0$, also $y=0$). □

Beweis von Satz 3.5.
Sei $x \in H$ beliebig und sei $S : H \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \langle x,y\rangle$. Mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz wird $\|S\|_\infty \leq \|x\|$ für alle $x\in H$. Für $x \neq 0$ ist andererseits $S\big(\frac{x}{\|x\|}\big) = \|x\|$, insgesamt also $\|S\|_\infty = \|x\|$ für alle $x \in H$. Dies zeigt, dass die Abbildung $H \to H^*$, $x \mapsto \langle x,\cdot\rangle$ eine isometrische Injektion ist. Bleibt die

Surjektivität zu zeigen: Sei dazu $T \in H^* \setminus \{0\}$ *und* $U := \ker T = T^{-1}(\{0\})$. *Da* T *stetig ist, ist* U *abgeschlossen und nach Satz 3.6 ist* $H = U \oplus U^\perp$.
Wir zeigen nun, dass $\dim U^\perp = 1$ *ist. Wegen* $T \neq 0$ *ist offenbar* $\dim U^\perp \geq 1$. *Seien* $u_0 \in U^\perp \setminus \{0\}$ *und* $w \in U^\perp$ *beliebig. Dann ist*

$$T\left(w - \frac{Tw}{Tu_0}\, u_0\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w - \frac{Tw}{Tu_0}\, u_0 \in U \cap U^\perp,$$

und daher $w = \frac{Tw}{Tu_0} u_0$, *da* $U \cap U^\perp = \{0\}$ *ist. Mithin ist* $U^\perp = \operatorname{span}\{u_0\}$, *also* $\dim U^\perp = 1$.
Sei nun $x \in H$. *Wegen* $H = U \oplus \operatorname{span}\{u_0\}$ *existieren ein* $v \in U$ *und ein* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $x = v + \lambda u_0$ *und es ist* $Tx = \lambda T u_0$. *Wegen*

$$\langle u_0, x\rangle = \langle u_0, v\rangle + \lambda \|u_0\|^2 = \lambda \|u_0\|^2$$

folgt $\lambda = \|u_0\|^{-2}\langle u_0, x\rangle$. *Damit haben wir* $Tx = \big\langle u, x\big\rangle$ *für alle* $x \in H$ *gezeigt, wobei* $u := \frac{Tu_0}{\|u_0\|^2} u_0$ *ist.* □

Mit Satz 3.5 folgt direkt die eindeutige Lösbarkeit von (WSP). Unbefriedigend ist, dass wir die Druckfuntion „verloren" haben. Um die Druckfunktion zu rekonstruieren kommen benötigen wir das folgende Hilslemma.

Lemma 3.7 (Bogovskii) *Sei* $U \subset \mathbb{R}^d$ *und* $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit* $\int_U f\, dx = 0$. *Dann existiert genau ein* $F \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\operatorname{div} F = f, \qquad \|F\|_{1,2} \leq c\|f\|_2.$$

Satz 3.8 (Druckfunktion)
Sei $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und* $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\operatorname{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *Lösung von (WSP). Dann existiert genau eine Druckfunktion* $p \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ *mit* $\int_\Omega p\, dx = 0$ *und*

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega p \cdot \operatorname{div}\varphi\, dx + \int_\Omega f \cdot \varphi\, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Beweis.
Wir definieren $T_{u,f} \in (\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d))^*$ *durch*

$$T_{u,f}(\varphi) := \int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\, dx - \int_\Omega f \cdot \varphi\, dx.$$

Da u *Lösung von (WSP) ist, gilt*

$$T_{u,f} = 0 \quad \textit{auf } \mathring{W}^{1,2}_{\operatorname{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Wir betrachten den Operator

$$A : \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d) \ni v \mapsto \operatorname{div} v \in L_0^2(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Dieser Operator ist linear und stetig und aus Lemma 3.7 wissen wir, dass er surjektiv ist, d.h. $Im(A) = L_0^2(\Omega)$. *Wir betrachten den konjugierten Operator* $A^* : L_0^2(\Omega) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, *d.h. es gilt*

$$\langle \varphi, A^* w\rangle_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \langle A\varphi, w\rangle_{L_0^2(\Omega)}$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $w \in L_0^2(\Omega)$. *Es gilt die Gleichheit*

$$[Ker(A)]^\perp = Im(A^*).$$

Da $T_{u,f}$ *auf* $Ker(A) = \mathring{W}_{div}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *verschwindet muss er (bzw.* $F \in \mathring{W}_{div}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit* $T_{u,f} = \langle F, \cdot\rangle$ *vgl. Riesz) daher im Bild von* A^* *liegen, d.h. es existiert* $p \in L_0^2(\Omega)$ *mit*

$$T_{u,f}(\varphi) = \langle \varphi, F\rangle = \langle \varphi, A^* p\rangle_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \langle A\varphi, p\rangle_{L_0^2(\Omega)} = \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \, dx.$$

Offenbar gilt diese Gleichheit auch auf $Ker(A) = \mathring{W}_{div}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und damit auf ganz* $\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, *d.h.*

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Nehmen wir an, es gebe Funktionen $p_1, p_2 \in L_0^2(\Omega)$ *die obige Gleichung erfüllen. Dann gilt*

$$\int_\Omega (p_1 - p_2) \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Die Funktion $p_1 - p_2$ *ist daher schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung 0. Ergo ist* $p_1 - p_2$ *konstant und, wegen Mittelwert 0, muss diese Konstante 0 sein. D.h.* $p_1 = p_2$. □

Nachdem Satz 3.4 und Satz 3.8 die eindeutige Existenz einer schwachen Lösung $(u, p) \in \mathring{W}_{div}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega, \mathbb{R})$ *zeigen, wollen wir zur starken Lösung zurückkehren. Deren Existenz folgt im Wesentlichen aus dem folgenen Resultat.*

Satz 3.9 (SSP)
Sei $f \in W^{k,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *Lösung von (WSP).*

a) u *gehört zur Klasse* $W^{k+1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$*.*

b) p *gehört zur Klasse* $W^{k,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$*.*

Mit dem Satz von Sobolev folgt

Korollar 3.10
Sei $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *Lösung von (WSP),* $p \in L^2(\Omega)$ *die Druckfunktion aus Satz 3.8 und* $d \in \{2, 3\}$*.*

a) Sei $f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$*, dann gilt*

$$\Delta u = \nabla p - f \quad \textit{fast überall auf } \Omega.$$

b) Sei $f \in W^{3,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$*, dann gilt* $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und* $p \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$

In a) erhalten wir $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$*,* $p \in W^{1,2}_{loc}$*, sowie mit Hilfe von Satz 3.8*

$$\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$*. Mit dem Fundementallema der Variationsrechnung (siehe Lemma 2.11) ergibt sich*

$$\Delta u = \nabla p - f \quad \textit{fast überall auf } \Omega.$$

Bevor wir zum Beweis von Satz 3.9 kommen benötigen wir noch ein Hilslemma.

Lemma 3.11 *Sei* $f : [0, R_0] \to [0, \infty)$ *eine monoton wachsende Funkion mit*

$$f(r) \leq A(R - r)^{-\alpha} + \theta f(R) \quad \textit{für alle } 0 \leq r < R \leq R_0$$

mit Konstanten $\alpha, A > 0$ *und* $\theta \in [0, 1)$*. Dann existiert* $c = c(A, \alpha, \theta)$ *mit*

$$f(r) \leq c(R_0 - r)^{-\alpha} \quad \textit{für alle } 0 \leq r \leq R_0.$$

Beweis.
Wir definieren für $\tau \in (0, 1)$ *und* $k \in \mathbb{N}$

$$t_0 := r, \quad t_{i+1} := t_i + (1 - \tau)\tau^i (R_0 - r), \quad i = 0, ..., k - 1.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(r) = f(t_0) &\leq A(t_1 - t_0)^{-\alpha} + \theta f(t_1) = A(1-\tau)^{-\alpha}(R_0 - r)^{-\alpha} + \theta f(t_1) \\ &\leq A(1-\tau)^{-\alpha}(R_0 - r)^{-\alpha} + \theta \left(A(t_2 - t_1)^{-\alpha} + \theta f(t_2) \right) \\ &= A(1-\tau)^{-\alpha}(R_0 - r)^{-\alpha} + A\theta(1-\tau)^{-\alpha}\tau^{-\alpha}(R_0 - r)^{-\alpha} + \theta^2 f(t_2) \end{aligned}$$

und wir erhalten induktiv

$$f(r) \leq \frac{A}{(1-\tau)^{\alpha}}(R_0 - r)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{k} \theta^i \tau^{-i\alpha} + \theta^k f(t_k).$$

Wählen wir τ, so dass

$$\frac{\theta}{\tau^{\alpha}} < 1$$

ist, konvergiert obige Summe bei $k \to \infty$ und es folgt wegen $\theta < 1$ und $f(t_k) \leq f(R_0)$

$$f(r) \leq c(A, \theta, \alpha)(R_0 - r)^{-\alpha},$$

also die Behauptung. □

Beweis von Satz 3.9.
Zunächst sei $k = 1$. Wir betrachten $\tilde{\varphi} := \Delta_h \varphi$ mit

$$\Delta_h g(x) := \frac{1}{h} \left(g(x + he_\gamma) - g(x) \right).$$

Ist $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $h < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\varphi), \partial\Omega)$ so ist $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und wir erhalten aus (SSP)

$$\int_\Omega (\nabla u(x + he_\gamma) - \nabla u(x)) : \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega (f(x + he_\gamma) - f(x)) \cdot \varphi(x) \, dx \quad (0.4)$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $h < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\varphi), \partial\Omega)$.
Wir betrachten für $0 < r < R \leq R_0$ mit Kugel $B_{R_0+h} \Subset \Omega$ eine Abschndeidefunktion $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf B_r und $|\nabla\eta| \leq c/(R - r)$. Wir definieren $\psi := h^{-1}(\eta^2 \Delta_h u)$ und erreichen, dass $\psi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist. Zulässige Testfunktionen müssen jedoch divergenzfrei sein. Zu $g := h^{-1} \operatorname{div}(\eta^2 \Delta_h u) \in L^2(B_R)$ mit $\int_{B_R} g \, dx = 0$ existiert (nach Lemma 3.7) $\Psi \in \mathring{W}^{1,2}(B_R, \mathbb{R}^d)$ mit

$$\operatorname{div} \Psi = g = h^{-1} \operatorname{div}(\eta^2 \Delta_h u) = h^{-1} \nabla\eta^2 \cdot \Delta_h u$$

zusammen mit

$$\|\Psi\|_{1,2} \le c\|g\|_2. \tag{0.5}$$

Wir definieren $\varphi := \psi - \Psi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und erhalten nach Einsetzen in (0.4)*

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx &= \int_{B_R} (\nabla u(x + he_\gamma) - \nabla u(x)) : \Psi \, dx \\
&\quad + \int_{B_R} (f(x + he_\gamma) - f(x)) \cdot \psi \, dx + \int_{B_R} (f(x + he_\gamma) - f(x)) \cdot \Psi \, dx \\
&=: J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned} \tag{0.6}$$

Die drei Integrale auf der rechten Seite werden separat abgeschätzt. Es ist

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{B_R} \Delta_h \nabla u \cdot h\Psi \, dx \le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + 2 \int_{B_R} |h\Psi|^2 \, dx \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + ch^2 \int_{B_R} |g|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + c \int_{B_R} |\nabla \eta^2 \Delta_h u|^2 \, dx \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R} |\Delta_h u|^2 \, dx \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_{R_0+h}} |\nabla u|^2 \, dx \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + \frac{c}{(R-r)^2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + \frac{c}{(R-r)^2},
\end{aligned} \tag{0.7}$$

wobei wir die Youngsche Ungleichung[a] *benutzt haben sowie (0.5) und Satz 2.25. Analog erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung*

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{B_R} \Delta_h f \cdot h\Psi \, dx \le \left(\int_{B_R} |\Delta_h f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |h\Psi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_{\Omega} |\nabla f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{(R-r)^2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{c}{R-r} \le \frac{c}{(R-r)^2}.
\end{aligned} \tag{0.8}$$

Man beachte, dass wir $f \in W^{1,2}(\Omega)$ *und* $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *benutzt haben.*

[a] für $a, b \ge 0$ ist $ab \le \tau a^2 + \frac{1}{\tau} b^2$, wobei $\tau > 0$ beliebig gewählt werden kann.

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
J_2 = \int_{B_R} \Delta_h f \cdot h\psi \, dx &\le \left(\int_{B_R} |\Delta_h f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |h\psi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \eta^2 \Delta_h u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{(R-r)^2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{c}{R-r} \le \frac{c}{(R-r)^2}. \qquad (0.9)
\end{aligned}$$

Fügen wir (0.6)-(0.9) zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx &\le \int_{B_R} \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + \frac{c}{(R-r)^2} \qquad (0.10)
\end{aligned}$$

richtig für alle $0 < r < R \le R_0$. *Benutzen wir Lemma 3.11 für* $\omega(r) := \int_{B_r} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx$, *so folgt*

$$\int_{B_r} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx \le \frac{c}{(R_0 - r)^2}$$

für alle $r \le R_0$. *Aus Sato 2.25 folgern wir* $\nabla u \in W^{1,2}_{loc}(B_{R_0}, \mathbb{R}^{d\times d})$ *und wegen der Beliebigkeit von* B_{R_0} *daher* $\nabla u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$, *also* $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.
Mit dieser Kenntnis, untersuchen wir die Druckfunktion. Wir betrachten $\varphi := (0, ., \phi, ..., 0)$ *mit* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega p \partial_\gamma \phi \, dx = \int_\Omega \nabla u^\gamma \cdot \nabla \phi \, dx + \int_\Omega f^\gamma \phi \, dx \quad \textit{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega).$$

Mit dem Satz von Gauss ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
\int_\Omega p \partial_\gamma \phi \, dx &= - \int_\Omega \Delta u^\gamma \phi \, dx + \int_\Omega f^\gamma \phi \, dx \\
&= - \int_\Omega (\Delta u^\gamma - f^\gamma) \phi \, dx.
\end{aligned}$$

Ergo ist p schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung

$$\partial_\gamma p = \Delta u^\gamma - f^\gamma.$$

Da γ beleibig war folgt

$$\nabla p = \Delta u - f$$

und aus $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ erhalten wir $\nabla p \in L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $p \in W^{1,2}(\Omega)$.

Die Aussage von Satz 3.9 für beliebige k folgt jetzt aus einer Iteration dieser Aussage. Wir demonstrieren dies für $k = 2$, sei also $f \in W^{2,2}(\Omega)$. Wir wissen bereits $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $p \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Aus $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ folgt auch $\partial_\gamma \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $\gamma \in \{1, ..., d\}$, und damit

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \partial_\gamma \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \partial_\gamma \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

mit $\operatorname{div} \varphi = 0$. *Man bachte, dass sich auch* $\operatorname{div} \varphi = 0$ *auf* $\partial_\gamma \varphi$ *überträgt. Partielle Integration (Satz von Gauß) liefert*

$$\int_\Omega \nabla \partial_\gamma u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \partial_\gamma f \cdot \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

mit $\operatorname{div} \varphi = 0$. *Die Definition von $\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ergibt*

$$\int_\Omega \nabla \partial_\gamma u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \partial_\gamma f \cdot \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

D.h. $\partial_\gamma u$ ist schwache Lösung der selben Gleichung mit f ersetzt durch $\partial_\gamma f$. Die selbe Argumentaton wie in obigem Beweis zeigt unter Verwendung von

$$\int_\Omega \nabla \partial_\gamma u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \partial_\gamma p \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_\Omega \partial_\gamma f \cdot \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d),$$

dass $\partial_\gamma u$ zu Klasse $W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ gehört sowie $\partial_\gamma p \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Die Beliebigkeit $\gamma \in \{1, ..., d\}$ beweist $u \in W^{3,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ gehört sowie $p \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. □

§ 4. Das stationäre Navier-Stokes Problem

In diesem Kapitel werden wir den „konvektiven Term“ $(\nabla u)u$ in unsere Untersuchung einbeziehen. Das Ergebnis ist eine nichtlineare Gleichung und der Satz von Riesz muss durch ein anderes Argument ersetzt werden.

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, und eine Kraft $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und eine Druckfunktion $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \nu\Delta u = \rho(\nabla u)u + \nabla p - \rho f & \textit{auf } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \textit{auf } \Omega, \\ u = 0 & \textit{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{NSP}$$

- *Die tatsächlichen Werte von ν und ρ sind lediglich für die Eindeutigkeit einer Lösung von Bedeutung, daher werden wir sie ansonsten der Einfachheit halber auf 1 setzen;*

- *Im Gegensatz zum letzten Kapitel spielt es hier keine Rolle wie schnell die Bewegung ist;*

- *Durch den Term $(\nabla u)u$ ergibt sich eine nichtlineare Gleichung.*

Zunächst leiten wir die schwache Formulierung von (NSP) her. Wir nehmen an, wir hätten eine Lösung der Gleichung (NSP) und multiplizieren mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div}\varphi = 0$. Es folgt

$$\nu \int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx = \rho \int_\Omega (\nabla u)u \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx - \rho \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx. \tag{0.1}$$

Wie zuvor ist

$$\nu \int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \, dx = -\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx.$$

sowie

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \varphi \, dx = 0.$$

Schließlich erhalten wir wegen $\operatorname{div} u = 0$

$$\int_\Omega (\nabla u)u \cdot \varphi \, dx = -\int_\Omega u \otimes u : \nabla \varphi \, dx.$$

Insgesamt is (0.1) also äquivalent zu

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \rho \int_\Omega u \otimes u : \nabla \varphi \, dx + \rho \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \tag{0.2}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div} \varphi = 0$.
In der schwachen Formulierung ist eine Funktion $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *gesucht mit*

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \rho \int_\Omega u \otimes u : \nabla \varphi \, dx + \rho \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \tag{WNSP}$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Durch Approximation von Funktionen der Klasse* $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit glatten Funktionen ist wie in Kapitel 2 der Übergang von* $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div} \varphi = 0$ *möglich.*

Satz 4.1 (Schwache Lösung)
Sei $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Dann existiert mindestens eine Lösung* $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *von (WNSP).*

Bevor wir zum Beweis kommen benötigen wir noch ein entscheidendes Werkzeug, das den Satz von Riesz ersetzt.

Satz 4.2 (Leray-Schauder-Prinzip) *Sei* X *ein Banachraum und* $T : X \to X$ *ein stetiger kompakter Operator, im allgemeinen nichtlinear.*

a) *Sei* $U \subset X$ *abgeschlossen, beschränkt und konvex sowie* $T(U) \subset U$. *Dann hat* T *einen Fixpunkt in* U.

b) *Liegen alle potentiellen Lösungen der Gleichung*

$$x = \lambda T x, \qquad \lambda \in [0,1]$$

in einer Kugel $B_r(0) \subset X$, *so hat die Gleichung*

$$x = Tx$$

zumindest eine Lösung $x^* \in B_r(0)$.

Das Leray-Schauder-Prinzip ist eine Folgerung des Brouwerschen Fixpunktsatz

Satz 4.3 (Brouwer) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, beschränkt und konvex sowie $T : U \to U$ stetig. Dann hat T einen Fixpunkt in U.*

Beweis von Satz 4.3.

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Da U beschränkt ist, ist $T(U)$ kompakt, lässt sich als durch endlich viele Kugeln mit Radius $1/k$ überdecken. D.h. es existiert $N = N(k)$ und $x_1, ..., x_N \in T(U)$ mit

$$T(U) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{k}}(x_i).$$

Da U konvex ist und $T(U) \subset U$, ist die konvex Hülle U_k von $\{x_1, .., x_N\}$ Teilmenge von U. Wir definieren

$$J_k : U \to U_k,\ x \mapsto \sum_i \frac{\operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i))x_i}{\sum_i \operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i))}.$$

Offenbar ist J_k stetig und für $x \in U$ ist

$$\|J_k x - x\| \leq \frac{\sum_i \operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i))\|x_i - x\|}{\sum_i \operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i))} < \frac{1}{k}. \tag{0.3}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass für $x \in B_{\frac{1}{k}}(x_i)$ $\|x_i - x\| < 1/k$ ist während ansonsten $\operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i)) = 0$ gilt. In jedem Fall aber

$$\operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i))\|x_i - x\| < \operatorname{dist}(x, U \backslash B_{\frac{1}{k}}(x_i))\frac{1}{k}.$$

Die Abbildung $J_k \circ T : U_k \to U_k$ hat nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Fixpunktsatz $x^k \subset U_k \subset U$. Da U beschränkt ist und T kompakter Operator, existiert eine Teilfolge $(x^{k_l}) \subset (x^k)$ mit

$$Tx^{k_l} \longrightarrow x \in U, \quad l \to \infty,$$

man bachte $T(U) \subset U$ sowie, dass U abgeschlossen ist. Aus (0.3) folgt

$$\|x^{k_l} - Tx^{k_l}\| = \|J_k \circ Tx^{k_l} - Tx^{k_l}\| < \frac{1}{k_l},$$

ergo $x = \lim_l x^{k_l} \in U$. Da T stetig ist folgt

$$Tx = \lim_l Tx^{k_l} = x,$$

d.h. T besitzt einen Fixpunkt $x \in U$.

b) Wir definieren

$$\widetilde{T}x := \begin{cases} Tx & , \quad \textit{falls } \|Tx\| \le r, \\ \frac{Tx}{\|Tx\|}r & , \quad \textit{falls } \|Tx\| \ge r \end{cases}$$

Offenbar ist $\widetilde{T} : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ stetig und kompakt. Die Kompaktheit sieht man wie folgt: Ist $(x_n) \subset \overline{B}_r(0)$ beschränkt so existiert eine Teilfolge $(\widetilde{x}_n) \subset (x_n)$ mit $T\widetilde{x}_n \to y \in X$, da T kompakt ist. Stetigkeit von T ergibt

$$\widetilde{T}\widetilde{x}_n \to \begin{cases} y & , \quad \textit{falls } \|y\| \le r, \\ \frac{y}{\|y\|}r & , \quad \textit{falls } \|y\| \ge r \end{cases}$$

Nach a) existiert ein Fixpunkt $x^* \in \overline{B}_r(0)$ von $\widetilde{T}$. Wir zeigen, dass x^* auch Fixpunkt von T ist: Nehmen wir an $\|Tx^*\| \ge r$. Dann ist

$$x^* = \widetilde{T}x^* = \lambda T x^*, \quad \lambda = \frac{r}{\|Tx^*\|} \in [0,1]$$

sowie $\|x^*\| = \|\widetilde{T}x^*\| = r$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $x^* \in B_r(0)$. Demnach muss $\|Tx^*\| < r$ sein und damit

$$x^* = \widetilde{T}x^* = Tx^*$$

sowie $x \in B_r(0)$. □

Beweis von Satz 4.1: *Definieren wir*

$$L_f(\varphi) := \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx,$$

so erhalten wir eine stetige lineare Abbildung von $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Riesz (Satz 3.5) existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $F \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit

$$L_f(\varphi) = \langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla F : \nabla \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d$. Auch die Abbildung

$$L_{u \otimes u}(\varphi) := \int_\Omega u \otimes u : \nabla \varphi \, dx$$

gehört zur Klasse $\left(\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)\right)^*$*, denn*

$$\begin{aligned}|L_{u\otimes u}(\varphi)| &\le \int_\Omega |u|^2|\nabla\varphi|\,dx \le \left(\int_\Omega |u|^4\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\right)^{\frac12}\\ &\le c\|\nabla u\|_2\|\nabla\varphi\|_2.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Ungleichungen von Hölder und Sobolev benutzt. Man beachte die stetige Einbettung

$$\mathring{W}^{1,2} \hookrightarrow L^6 \hookrightarrow L^4$$

für $d = 2$ *und* $d = 3$*. Nach dem Satz von Riesz existiert daher eine eindeutig bestimmete Funktion* $U \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$L_{u\otimes u}(\varphi) = \langle U,\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla U : \nabla\varphi\,dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$*. Dies Funktion hängt (in nichtlinearer Weise von)* u *ab, d.h. es existiert eine (nichtlineare Abbildung)*

$$A : \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d) \to \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d), \quad u \mapsto U.$$

Zusammengefasst ist (WNSP) äquivalent mit finde $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\langle u,\varphi\rangle = \langle Au,\varphi\rangle + \langle F,\varphi\rangle$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$*, was gleichbedeutend ist mit*

$$\langle u - (Au + F),\varphi\rangle = 0$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$*. Dies is äquivalent zu*

$$u = Au + F =: Tu. \tag{0.4}$$

Offenbar ist T *ein nichtlinearer Operator von* $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d) \to \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$*. Zunächst müssen wir zeigen, dass* T *kompakt ist, d.h. beschränkte Folgen* $(v_n) \subset \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *werden auf kompakte Folgen* $(Tv_n) \subset \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *abgebildet. Wir müssen also zeigen:* (v_n) *beschränkt* $\Rightarrow$ (Tv_n) *hat eine konvergent Teilfolge. Zunächst benutzen wir den Satz von Kondrachov: Ist* (v_n) *in* $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *beschränkt, so gibt es nach Satz 2.32 eine Teilfolge* $(\tilde v_n) \subset (v_n)$*, die in* $L^4(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *konvergent ist (beachte* $d \in \{2,3\}$*). Wir zeigen, dass* $(T\tilde v^n)$ *in* $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *kon-*

vergiert. Wir berechnen für $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit der Ungleichung von Hölder

$$\langle T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n, \varphi\rangle = \langle A\tilde{v}^m - A\tilde{v}^n, \varphi\rangle = \int_\Omega (\tilde{v}^m \otimes \tilde{v}^m - \tilde{v}^n \otimes \tilde{v}^n) : \nabla\varphi \, dx$$
$$= \int_\Omega \tilde{v}^m \otimes (\tilde{v}^m - \tilde{v}^n) : \nabla\varphi \, dx + \int_\Omega (\tilde{v}^m - \tilde{v}^n) \otimes \tilde{v}^n : \nabla\varphi \, dx$$
$$\leq \left\{ \left(\int_\Omega |\tilde{v}^m|^2 |\tilde{v}^m - \tilde{v}^n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\tilde{v}^n|^2 |\tilde{v}^m - \tilde{v}^n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \|\tilde{v}^m - \tilde{v}^n\|_4 \left(\|\tilde{v}^n\|_4 + \|\tilde{v}^m\|_4 \right) \|\varphi\|_{\mathring{W}^{1,2}}.$$

Da T in den Raum $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ abbildet ist die Wahl $\varphi = T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n$ zulässig, d.h.

$$\langle T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n, T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n\rangle \leq \|\tilde{v}^m - \tilde{v}^n\|_4 \left(\|\tilde{v}^n\|_4 + \|\tilde{v}^m\|_4 \right) \|T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n\|_{\mathring{W}^{1,2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \|T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n\|_{\mathring{W}^{1,2}} \leq \|\tilde{v}^m - \tilde{v}^n\|_4 \left(\|\tilde{v}^n\|_4 + \|\tilde{v}^m\|_4 \right).$$

Die Beschränktheit von $(\tilde{v}_n)$ in $L^4(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ergibt

$$\|T\tilde{v}^m - T\tilde{v}^n\|_{\mathring{W}^{1,2}} \leq C\|\tilde{v}^m - \tilde{v}^n\|_4 \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daher ist $(T\tilde{v}^n)$ eine Cauchy-Folge in $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und damit konvergent. Also ist T kompakt.
Um das Leray-Schauder-Prinzip anzuwenden fehlt uns noch eine weitere Eigenschaft von T: betrachten wir Lösungen $u_\lambda \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$(deren Existenz unklar ist) von

$$u = \lambda T u$$

für $\lambda \in [0, 1]$. Wir müssen zeigen, dass

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} \|u_\lambda\|_{\mathring{W}^{1,2}} < \infty \tag{0.5}$$

ist. zunächst multiplizieren wir die Gleichung $u_\lambda - \lambda(Au_\lambda + F) = 0$ skalar (in $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$) mit u_λ und erhalten

$$\langle u_\lambda, u_\lambda\rangle - \lambda\langle Au_\lambda, u_\lambda\rangle = \lambda\langle F, u_\lambda\rangle = \lambda \int_\Omega f \cdot u_\lambda \, dx.$$

Hierbei ist

$$\langle Au_\lambda, u_\lambda\rangle = \int_\Omega u_\lambda \otimes u_\lambda : \nabla u_\lambda \, dx = \sum_{i,j} \int_\Omega u^i_\lambda u^j_\lambda \partial_i u^j_\lambda \, dx$$

$$= \sum_{i,j} \frac{1}{2} \int_\Omega u_\lambda^i \partial_i (u_\lambda^j)^2 \, dx = \sum_j \frac{1}{2} \int_\Omega u_\lambda \cdot \nabla (u_\lambda^j)^2 \, dx.$$

Der Satz von Gauß ergibt

$$\langle A u_\lambda, u_\lambda \rangle = -\sum_j \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} u_\lambda \cdot (u_\lambda^j)^2 \, dx + \sum_j \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div}(u_\lambda (u_\lambda^j)^2) \, dx = 0$$

wegen $u_\lambda \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *D.h. es gilt*

$$\|u_\lambda\|^2_{\mathring{W}^{1,2}} = \langle u_\lambda, u_\lambda \rangle = \lambda \int_\Omega f \cdot u_\lambda \, dx \le \lambda \|f\|_2 \|u_\lambda\|_2 \le c\lambda \|f\|_2 \|u_\lambda\|_{\mathring{W}^{1,2}},$$

wobei wir die Ungleichungen von Hölder und Sobolev benutzt haben. Insgesamt haben wir (0.5) gezeigt. Nach Satz 4.3 existiert eine Funktion $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$u = Au + F,$$

was nach Wahl von A und F bedeutet, dass u Lösung von (WNSP) ist. □

Der folgende Satz zeigt die Eindeutigkeit der Lösung, allerdings unter Restriktionen an die Parameter ν *und* ρ, *die wir daher in die Überlegungen mit einbeziehen müssen.*

Satz 4.4 (Eindeutigkeit)
Unter der Voraussetzung

$$2\mu_1^3 \rho^2 \nu^{-2} \|f\|_2 < 1$$

existiert genau eine Lösung von (WNSP). Hierbe ist μ_1 *die optimale Konstante der Sobolev-Ungleichung, d.h.*

$$\mu_1 := \sup_{\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)} \frac{\|\varphi\|_4}{\|\nabla \varphi\|_2}.$$

Beweis.
Nehmen wir an, wir hätten zwei Lösungen $u_1, u_2 \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *von (WNSP). Wir betrachten* $v := u_1 - u_2 \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und erhalten*

$$\begin{aligned} \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx &= \rho \int_\Omega (u_1 \otimes u_1 - u_2 \otimes u_2) : \nabla \varphi \, dx \\ &= \rho \int_\Omega (v \otimes u_1 + u_2 \otimes v) : \nabla \varphi \, dx \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Die Wahl* $\varphi = v$ *führt uns auf*

$$\begin{aligned}\nu\|v\|^2_{\mathring{W}^{1,2}} &= \rho \int_\Omega \{v \otimes u_1 : \nabla v + u_2 \otimes v : \nabla v\}\, dx \\ &\leq \rho\,\{\|v \otimes u_1\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|u_2 \otimes v\|_2 \|\nabla v\|_2\} \\ &\leq \rho\,\{\|v\|_4 \|u_1\|_4 + \|u_2\|_4 \|v\|_4\}\, \|\nabla v\|_2 \\ &\leq \mu_1 \rho\,\{\|u_1\|_4 + \|u_2\|_4\}\, \|\nabla v\|_2^2 \\ &\leq \mu_1^2 \rho\,\{\|\nabla u_1\|_2 + \|\nabla u_2\|_2\}\, \|\nabla v\|_2^2. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Im Beweis von Satz (4.1) haben wir gezeit, dass schwache Lösungen u *Lösungen von* $u = Tu = Au + F$ *sind mit*

$$\|u\|_{\mathring{W}^{1,2}} \leq \mu_1 \|f\|_2.$$

Dies ist hier zu erstzen durch $\nu u = \rho A u + \rho F$ *sowie*

$$\|u\|_{\mathring{W}^{1,2}} \leq \mu_1 \frac{\rho}{\nu} \|f\|_2.$$

Benutzen wir dies für u_1 *und* u_2*, so erhalten wir aus (0.6)*

$$\nu\|v\|^2_{\mathring{W}^{1,2}} \leq 2\mu_1^3 \frac{\rho^2}{\nu} \|f\|_2 \|v\|^2_{\mathring{W}^{1,2}},$$

was äquivalent ist zu

$$\left(1 - 2\mu_1^3 \rho^2 \nu^{-2} \|f\|_2\right) \|v\|^2_{\mathring{W}^{1,2}} \leq 0.$$

Laut unserer Voraussetzung ist die Klammer positiv, daher folgt $\|v\|_{\mathring{W}^{1,2}} = 0$*, was die Behauptung liefert.* □

Wie in Satz 3.8 des letzten Kapitels wollen wir nun die Existenz der Druckfunktion p *zeigen, die Argumente erfolgen analog zu vorher.*

Satz 4.5 (Druckfunktion)
Sei $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *und* $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *Lösung von (WSP). Dann existiert genau eine Druckfunktion* $p \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ *mit* $\int_\Omega p\, dx = 0$ *und*

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} \varphi\, dx + \int_\Omega f \cdot \varphi\, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Beweis.

Wir definieren $T_{u,f} \in (\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d))^*$ durch

$$T_{u,f}(\varphi) := \int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega u \otimes u : \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx.$$

Da u Lösung von (WSP) ist, gilt

$$T_{u,f} = 0 \quad \textit{auf}\, \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Wir betrachten den Operator

$$A : \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d) \ni v \mapsto \operatorname{div} v \in L^2_0(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

wie im Beweis von Satz 3.8 existiert genau ein $p \in L^2_0(\Omega)$ mit

$$T_{u,f}(\varphi) = \langle \varphi, A^* p \rangle_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d)} = \langle A\varphi, p \rangle_{L^2_0(\Omega)} = \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega u \otimes u : \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Eindeutigkeit erfolgt wie zuvor. □

Man beachte, dass es zu jeder Lösung u passend ein p gibt. Gibt es mehrere Lösungen u, so gibt es auch mehrere Lösungstupel $(u, p) \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Wir wollen nun zur starken Lösung zurückkehren, diese folgt im wesentlichen aus dem folgenen Resultat.

Satz 4.6 (SNSP)
Sei $f \in W^{k,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ Lösung von (WNSP).

a) u gehört zur Klasse $W^{k+1,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

b) p gehört zur Klasse $W^{k,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$.

Mit dem Satz von Sobolev folgt wie in Kapitel 3.

Korollar 4.6
Sei $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ Lösung von (WNSP), $p \in L^2(\Omega)$ die Druckfunktion aus Satz 3.8 und $d \in \{2, 3\}$.

a) Sei $f \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, dann gilt

$$\Delta u = -(\nabla u)u + \nabla p - f \quad \textit{fast überall auf}\, \Omega.$$

b) Sei $f \in W^{3,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, dann gilt $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $p \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Beweis von Satz 4.6: *Wir argumentieren analog zu Satz 3.9. Zunächst sei $k = 1$. Wir betrachten $\tilde{\varphi} := \Delta_h \varphi$ mit*

$$\Delta_h g(x) := \frac{1}{h} \left(g(x + he_\gamma) - g(x) \right).$$

Ist $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $h < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\varphi), \partial\Omega)$ so ist $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und wir erhalten aus (WNSP)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\nabla u(x + he_\gamma) - \nabla u(x)) : \nabla \varphi \, dx \\ &\quad = \int_\Omega (u(x + he_\gamma) \otimes u(x + he_\gamma) - u(x) \otimes u(x)) : \nabla \varphi(x) \, dx \qquad (0.7) \\ &\quad + \int_\Omega (f(x + he_\gamma) - f(x)) \cdot \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $h < \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\varphi), \partial\Omega)$.
Wir betrachten für $0 < r < R \leq R_0$ mit Kugel $B_{R_0+h} \Subset \Omega$ eine Abschndeidefunktion $\eta \in C_0^\infty(B_R)$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf B_r und $|\nabla \eta| \leq c/(R - r)$. Wir definieren $\psi := h^{-1}(\eta^2 \Delta_h u)$ und erreichen, dass $\psi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist. Zulässige Testfunktionen müssen jedoch divergenzfrei sein. Zu $g := h^{-1} \operatorname{div}(\eta^2 \Delta_h u) \in L^2(\Omega)$ mit $\int_{B_R} g \, dx = 0$ existiert (nach Lemma 3.7) $\Psi \in \mathring{W}^{1,2}(B_R, \mathbb{R}^d)$ mit

$$\operatorname{div} \Psi = g = h^{-1} \operatorname{div}(\eta^2 \Delta_h u) = h^{-1} \nabla \eta^2 \cdot \Delta_h u$$

zusammen mit

$$\|\Psi\|_{1,2} \leq c \|g\|_2. \qquad (0.8)$$

Wir definieren $\varphi := \psi - \Psi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und erhalten nach Einsetzen in (0.7)

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \eta^2 |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx &= \int_{B_R} (\nabla u(x + he_\gamma) - \nabla u(x)) : \Psi \, dx \\ &\quad + \int_{B_R} (f(x + he_\gamma) - f(x)) \cdot \psi \, dx + \int_{B_R} (f(x + he_\gamma) - f(x)) \cdot \Psi \, dx \\ &\int_\Omega (\nabla u(x + he_\gamma) - \nabla u(x)) : \nabla \varphi \, dx \qquad (0.9) \\ &\quad + \int_\Omega (u(x + he_\gamma) \otimes u(x + he_\gamma) - u(x) \otimes u(x)) : \nabla(\psi - \Psi) \, dx \\ &\quad =: J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \qquad (0.10) \end{aligned}$$

Die Integrale J_1, J_2, J_3 werden wie zuvor abgeschätzt mit dem Ergebnis

$$J_1 + J_2 + J_3 \leq \frac{1}{2} \int_{B_R} |\Delta_h \nabla u|^2 \, dx + \frac{c}{(R-r)^2}. \tag{0.11}$$

Widmen wir uns dem Term J_4, der aus dem Auftreten des konvektiven Terms resultiert. Es ist

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_\Omega \Delta_h(u \odot u) : \nabla(\eta^2 \Delta_h u - h\Psi) \, dx \\
&= 2 \int_\Omega \Delta_h u \odot u : \nabla \eta^2 \otimes \Delta_h u \, dx + 2 \int_\Omega \eta^2 \Delta_h u \odot u : \Delta_h \nabla u \, dx \\
&- 2 \int_\Omega \Delta_h u \odot u : h \nabla \Psi \, dx \\
&=: 2J_4^1 + 2J_4^2 - 2J_4^3,
\end{aligned}$$

wobei $\eta \odot \xi := \frac{1}{2}(\eta \otimes \xi + \xi \otimes \eta)$ das symmetrische Tensorprodukt bezeichnet. Die Integrale werden getrennt betrachtet und wir erhalten unter Verwendung der Ungleichung von Young sowie Satz 2.25

$$\begin{aligned}
J_4^1 &\leq \frac{c}{R-r} \int_{B_R} |\eta \Delta_h u \odot u| |\Delta_h u| \, dx \\
&\leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_{B_R} |\Delta_h u|^2 \, dx + \int_{B_R} |\eta \Delta_h u \odot u|^2 \, dx \\
&\leq \frac{c}{(R-r)^2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{B_R} |\eta \Delta_h u \odot u|^2 \, dx \\
&\leq \frac{c}{(R-r)^2} + \int_{B_R} |\eta \Delta_h u \odot u|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Um den verbleibenden Term abzuschätzen benutzen wir die Ungleichung von Sobolev es folgt im Fall $d \in \{2, 3\}$ [a]

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |\eta \Delta_h u \odot u|^2 \, dx &\leq c \left(\int_{B_R} |\nabla(\eta \Delta_h u \odot u)|^{\frac{3}{2}} \, dx \right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq c \left(\int_{B_R} |\nabla \eta|^{\frac{3}{2}} |\Delta_h u \odot u|^{\frac{3}{2}} \, dx + \int_{B_R} |\nabla(\Delta_h u \odot u)| \, dx \right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \frac{c}{(R-r)^2} \left(\int_{B_R} |\Delta_h u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} |u|^6 \, dx \right)^{\frac{1}{6}} \\
&+ c \left(\int_{B_R} |\Delta_h \nabla u| |u| \, dx \right)^{\frac{4}{3}} + c \left(\int_{B_R} |\Delta_h u| |\nabla u| \, dx \right)^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

[a] Man beachte die Ungleichung $(a+b)^q \leq c(q)(a^q + b^q)$ richtig für alle $a, b \geq 0$ und alle $q \geq 0$.

$$\leq \frac{c}{(R-r)^2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + c\left(\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u||u|\,dx\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$+\,c\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{4}{3}} \leq \frac{c}{(R-r)^2} + c\left(\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u||u|\,dx\right)^{\frac{4}{3}}.$$

Weiter schätzen wir ab mit der Ungleihcung von Hölder für $p=\frac{4}{3}$ und $p'=4$ sowie der Ungleichung von Young [b] *mit $p=\frac{3}{2}$ und $p'=3$*

$$\begin{aligned} c\left(\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u||u|\,dx\right)^{\frac{4}{3}} &\leq c\left(\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^{\frac{4}{3}}\,dx\right)\left(\int_{B_R}|u|^4\,dx\right)^{\frac{1}{3}} \leq c\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^{\frac{4}{3}}\,dx \\ &\leq \tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx + c(\tau)\int_{B_R}dx \\ &\leq \tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx + c(\tau), \end{aligned}$$

wobei $\tau>0$ noch beliebig ist. Das heißt wir haben

$$2J_4^1 \leq 2\tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx + \frac{c(\tau)}{(R-r)^2} \tag{0.12}$$

bewiesen. Mit der Ungleichung von Young sehen wir

$$\begin{aligned} |J_4^2| &\leq \int_{B_R}|\eta\Delta_h u\odot u||\Delta_h\nabla u|\,dx \leq \tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx + c(\tau)\int_{B_R}|\eta\Delta_h u\odot u|^2\,dx \\ &\leq 2\tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx + \frac{c(\tau)}{(R-r)^2}, \end{aligned} \tag{0.13}$$

wobei wir im letzten Schritt die Argumentation von J_4^1 benutzt haben. Im folgenden schätzen wir den letzten Term ab: es ist für $C_h\in\mathbb{R}$ bel. (beachte, dass $\Psi\in\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ ist sowie den Satz von Gauß und die Youngsche Ungleichung)

$$\begin{aligned} J_4^3 &= \int_\Omega(\Delta_h u\odot u - C_h) : h\nabla\Psi\,dx \leq c\int_{B_R}|\Delta_h u\odot u - C_h||h\nabla\Psi|\,dx \\ &\leq c(\tau)\int_{B_R}|\Delta_h u\odot u - C_h|^2\,dx + \tau\int_{B_R}|h\nabla\Psi|^2\,dx. \end{aligned}$$

Wählen wir $C_h := (\Delta_h u\odot u)_{B_R}$ so ist nach der Sobolev-Poincaré-Ungleichung (vgl. GdV)

$$c(\tau)\int_{B_R}|\Delta_h u\odot u - C_h|^2\,dx \leq c(\tau)\left(\int_{B_R}|\nabla(\Delta_h u\odot u)|^{\frac{3}{2}}\,dx\right)^{\frac{4}{3}},$$

[b] Es gilt für $a,b\geq 0$ und $p\in(1,\infty)$ die Ungleichung $ab\leq \tau a^p + c(\tau)b^{p'}$ für alle $\tau>0$.

was wie zuvor abgeschätzt werden kann mit dem Ergebnis

$$c(\tau)\int_{B_R}|\Delta_h u\odot u-C_h|^2\,dx\leq\tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+\frac{c(\tau)}{(R-r)^2}.$$

Nach Wahl von Ψ ergibt sich (vgl. (0.8))

$$\begin{aligned}\tau\int_{B_R}|h\nabla\Psi|^2\,dx&\leq c\tau\int_{B_R}|\nabla(\eta^2\Delta_h u)|^2\,dx\\ &\leq c\tau\int_{B_R}\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+c\tau\int_{B_R}|\nabla\eta^2\Delta_h u|^2\,dx\\ &\leq c\tau\int_{B_R}\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+\frac{c\tau}{(R-r)^2}\int_{B_R}|\Delta_h u|^2\,dx\\ &\leq c\tau\int_{B_R}\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+\frac{c\tau}{(R-r)^2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\\ &\leq c\tau\int_{B_R}\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+\frac{c\tau}{(R-r)^2}.\end{aligned}$$

Wir haben (ersetze falls $c>1$ ist τ durch τ/c)

$$J_4^3\leq\tau\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+\frac{c(\tau)}{(R-r)^2},\tag{0.14}$$

Fassen wir (0.11)-(0.14) zusammen und wählen wir τ genügend klein führt dies auf

$$\int_{B_R}\eta^2|\Delta_h\nabla u|^2\,dx\leq\frac{3}{4}\int_{B_R}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx+\frac{c}{(R-r)^2}.$$

Benutzen wir Lemma 3.11 für $\omega(r):=\int_{B_r}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx$, so folgt

$$\int_{B_r}|\Delta_h\nabla u|^2\,dx\leq\frac{c}{(R_0-r)^2}$$

für alle $r\leq R_0$. Aus Satz 2.25 folgern wir $\nabla u\in W^{1,2}_{loc}(B_{R_0},\mathbb{R}^{d\times d})$ und wegen der Beliebigkeit von B_{R_0} daher $\nabla u\in W^{1,2}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^{d\times d})$, also $u\in W^{2,2}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^d)$. Mit dieser Kenntnis, untersuchen wir die Druckfunktion. Wir betrachten $\varphi:=(0,.,\phi,...,0)$ mit $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ und erhalten

$$\int_\Omega p\partial_\gamma\phi\,dx=\int_\Omega\nabla u^\gamma\cdot\nabla\phi\,dx-\int_\Omega(u\otimes u)_\gamma\cdot\nabla\phi\,dx+\int_\Omega f^\gamma\phi\,dx.$$

Mit dem Satz von Gauss ergibt sich hieraus

$$\int_\Omega p\partial_\gamma\phi\,dx=-\int_\Omega\Delta u^\gamma\phi\,dx+\int_\Omega\operatorname{div}(u\cdot u)_\gamma\phi\,dx+\int_\Omega f^\gamma\phi\,dx$$

$$= -\int_\Omega (\Delta u^\gamma - \operatorname{div}(u \otimes u)_\gamma \cdot u - f^\gamma)\phi \, dx.$$

Ergo ist p schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung

$$\partial_\gamma p = \Delta u^\gamma - \operatorname{div}(u \otimes u)_\gamma - f^\gamma.$$

Da γ beleibig war folgt

$$\nabla p = \Delta u - \operatorname{div}(u \otimes u) - f$$

und aus $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $\operatorname{div}(u \otimes u) \in L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ erhalten wir $\nabla p \in L^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $p \in W^{1,2}(\Omega)$.
Die Aussage von Satz 4.6 für beliebige k folgt jetzt aus einer Iteration dieser Aussage. Wir demonstrieren dies für $k = 2$, sei also $f \in W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Wir wissen bereits $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $p \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Aus $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ folgt auch $\partial_\gamma \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $\gamma \in \{1, ..., d\}$, und damit

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \partial_\gamma \varphi \, dx = \int_\Omega (u \cdot u) : \nabla \partial_\gamma \varphi \, dx + \int_\Omega f \cdot \partial_\gamma \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d$ mit $\operatorname{div} \varphi = 0$. Man bachte, dass sich auch $\operatorname{div} \varphi = 0$ auf $\partial_\gamma \varphi$ überträgt. Partielle Integration (Satz von Gauß) liefert

$$\int_\Omega \nabla \partial_\gamma u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \partial_\gamma (u \cdot u) : \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \partial_\gamma f \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} \varphi = 0$. Definition von $\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ergibt

$$\int_\Omega \nabla \partial_\gamma u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \partial_\gamma (u \cdot u) : \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \partial_\gamma f \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Im Gegensatz zur linearen Gleichung in Kapitel 3 ist dies erhalten wir für $\partial_\gamma u$ nicht die selbe Gleichung wie zuvor mit f ersetzt durch $\partial_\gamma f$. Dies liegt daran, dass

$$\partial_\gamma (u \otimes u) = \partial_\gamma u \otimes u + u \otimes \partial_\gamma u \neq \partial_\gamma u \otimes \partial_\gamma u.$$

Jedoch verhält sich der Term $\partial_\gamma (u \otimes u)$ besser als $\partial_\gamma u \otimes \partial_\gamma u$, so dass wir trotzdem wie zuvor argumentieren können und erhalten $u \in W^{3,2}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ sowie $p \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. □

§ 5. Das instationäre Navier-Stokes Problem

Dieses Kaptiel enthält das allgemeinste Modell mit Zeitabhängigkeit und konvektivem Term. Die hier besprochene Methode zum Existenzbeweis für schwache Lösungen lässt sich auch für beide stationäre Modelle anwenden ist jedoch deutlich komplizierter.

Gegeben seien

- *ein beschränktes Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$*;*
- *Ein Zeitintervall* $[0, T]$, $T > 0$, *wir definieren den parabolischen Zylinder* $Q_T := [0, T] \times \Omega$*;*
- *eine Kraft* $f : Q_T \to \mathbb{R}^d$*;*
- *Startwerte* $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld $u : Q_T \to \mathbb{R}^d$ *und eine Druckfunktion* $p : Q_T \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\begin{cases} -\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u = \rho (\nabla u) u + \nabla p - \rho f & \textit{auf} \quad Q_T, \\ \operatorname{div} u = 0 & \textit{auf} \quad Q_T, \\ u = 0 & \textit{auf} \quad [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \textit{auf} \quad \Omega, \end{cases} \tag{INSP}$$

- *Wie üblich setzen wir* ν *und* ρ *auf 1,*
- *Durch die zusätzlich Zeitabhängigkeit müssen wir neue Funktionenräume einführen.*

Zunächst leiten wir die schwache Formulierung von (INSP) her. Wir nehmen an, wir hätten eine Lösung der Gleichung (INSP) und multiplizieren mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(O_T, \mathbb{R}^d)$, $O_T := (-\infty, T) \times \Omega$, *mit* $\operatorname{div} \varphi = 0$. *Man beachte, dass sich die Divergenz nur auf die Ortsvariable und nicht auf die Zeit bezieht. Die Testfunktion ist bewusst i.a. ungleich Null für* $t = 0$ *um die*

Startwerte mit zuberücksichtigen. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
-\int_{Q_T} u_t \cdot \varphi \, dx \, dt + \int_{Q_T} \Delta u \cdot \varphi \, dx \, dt \\
= \int_{Q_T} (\nabla u) u \cdot \varphi \, dx \, dt + \int_{Q_T} \nabla p \cdot \varphi \, dx \, dt - \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx \, dt.
\end{aligned} \tag{0.1}
$$

Wie zuvor ist

$$
\int_{Q_T} \Delta u \cdot \varphi \, dx \, dt = -\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \varphi \, dx \, dt,
$$

da φ auf $\partial\Omega$ für alle Zeitpunkte gleich 0 ist. Ebenso erhalten wir wieder

$$
\int_{Q_T} \nabla p \cdot \varphi \, dx \, dt = 0
$$

sowie

$$
\int_{Q_T} (\nabla u) u \cdot \varphi \, dx \, dt - \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla \varphi \, dx \, dt.
$$

Von Interessant ist lediglich der erste Term: hier ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} u_t \cdot \varphi \, dx \, dt &= \int_0^T \int_\Omega u_t \cdot \varphi \, dx \, dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega u \cdot \varphi_t \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (u \cdot \varphi)_t \, dx \, dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega u \cdot \varphi_t \, dx \, dt + \int_\Omega \int_0^T (u \cdot \varphi)_t \, dt \, dx \\
&= -\int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx \, dt - \int_\Omega u_0 \cdot \varphi(0, \cdot) \, dx.
\end{aligned}
$$

Insgesamt is (0.1) also äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx \, dt \\
+ \int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx \, dt + \int_\Omega u_0 \cdot \varphi(0, \cdot) \, dx
\end{aligned} \tag{0.2}
$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(O_T, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} \varphi = 0$.
Bevor wir die schwache Lösung definieren, müssen wir einen geeigneten Funktionenraum definieren. Um zu gewährleisten, dass das Integral

$$
\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \varphi \, dx \, dt
$$

existiert, sollten ∇u *und* $\nabla\varphi$ *zur Klasse* $L^2(Q_T, \mathbb{R}^{d\times d})$ *gehören und außerdem sollten sie divergenzfrei sein. Daher betrachten wir Funktionen*

$$u \in L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)).$$

Elemente von $L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$ *sind Abbildungen, die reellen Zahlen Sobolevfunktionen der Klasse* $\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *zuordnen*

$$[0,T] \ni t \mapsto u(t,\cdot) \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Allgemein definiert man für einen Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$ *den Bochner-Raum* $L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$ *durch*

$$L^p(0,T;X) := \left\{ w : [0,T] \to X,\ w \text{ Bochner-messbar mit } \int_0^T \|w(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\}.$$

Hierbei heißt eine Funktion $w : [0,T] \to X$ *Bochner-messbar, falls es eine Folge von Treppenfunktionen* (w_n) *gibt mit*

$$\|w_n(t) - w(t)\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für fast alle } t.$$

Genauer gilt sogar (vgl. [Ze])

- *Man definiert das Bochner-Integral von* w *durch*

$$\int_0^T w(t)\, dt := \lim_n \int_0^T w_n(t)\, dt.$$

- *Es gibt eine Folge von* (w_n) *von Treppenfunktionen mit*

$$w_n \to w \quad \text{in } L^p(0,T;X).$$

- $L^p(0,T;X)$ *ist ein Banachraum zusammen mit der Norm*

$$\|w\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|w(t)\|_X \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Ist* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Hilbertraum, so ist* $L^2(0,T;H)$ *ist ein Hilbertraum zusammen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle w, v\rangle_{L^2(0,T;H)} := \int_0^T \langle w(t), v(t)\rangle \, dt.$$

Betrachten wir den Raum $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *so gelten die gewünschten Eigenschaften (Nullrandwerte, Divergenzfrei) punktweise für fast alle* $t \in [0,T]$. *Außerdem erhalten wir.*

Lemma 5.1 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt und* $T > 0$. *Dann gilt.*

a) *Für alle* $1 \leq p < \infty$ *ist* $L^p(0,T;L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)) = L^p(Q_T,\mathbb{R}^d)$.

d) *Der Raum* $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *ist ein Hilbertraum zusammen mit dem Skalarprodukt*
$$\langle u,v\rangle := \int_{Q_T} \nabla u : \nabla v \, dx\, dt.$$

c) *Die Einbettung*
$$\left\{u \in L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)), u_t \in L^2(0,T;\mathring{W}^{3,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))^*\right\}$$
$$\hookrightarrow L^2(0,T;L^s(\Omega,\mathbb{R}^d)), \quad s < \frac{2d}{d-2}$$

ist kompakt (siehe [MNRR], Lemma 2.48).

In der schwachen Formulierung ist eine Funktion $u \in L^2((0,T);\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *gesucht mit*

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \nabla u : \nabla\varphi \, dx\, dt = \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla\varphi\, dx\, dt + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx\, dt \\ + \int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx\, dt + \int_{\Omega} u_0 \cdot \varphi(0,\cdot)\, dx\end{aligned} \tag{WINSP}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(O_T,\mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div}\varphi = 0$. *Da das Problem aufgrund der Zeitableitung nicht mehr symmetrisch ist und wir punktweise Eigenschaften der Testfunktionen benötigen ist passender nur mit glatten Testfukionen zu arbeiten.*

Satz 5.2 (Schwache Lösung)
Sei $f \in L^2(Q_T,\mathbb{R}^d)$. *Dann existiert mindestens eine Lösung* $u \in L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *von (WINSP).*

Die Hauptidee besteht im Galerkinverfahren: wir approximieren den Lösungsraum $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *durch einen endlichdimensionalen Unterrraum. Dann lösen wir das Problem in diesem Unterraum, was recht einfach ist. Schließlich haben wir eine Folge* (u^N) *von Hilfslösungen. Natürlich ist das Ziel zu zeigen, dass* (u^N) *gegen eine Funktion u konvergiert und u sollte zur Klasse* $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *gehören sowie Lösung von (WINSP) sein. Wie zeigt man eine solche Konvergenz? Recht leicht sieht man die Beschränktheit* u^N

in $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$*. In endlich-dimensionaln Räumen könnte man eine konvergente Teilfolge auswählen. Der Satz von Bolzano-Weierstraß greift hier allerdings nicht.*

Zum Beweis von Satz 5.2 müssen wir noch einige Hilfsmittel entwickeln:

- *Wir benötigen eine geeinte Approximation von* $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *durch eine Folge endlich-dimensionaler Unterräume.*
- *Wir werden eine abgeschwächte Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß für Hilberträume entwickeln.*

Wir widmen uns zunächst dem zweiten Problem, da wir dies auch zur Lösung des ersten benötigen werden. Zunächst führen wir den Begriff der schwachen Konvergenz ein, dazu folgende Motivation: Wir betrachten den Raum $X := \ell^2$ *der quadratisch summierbaren Folgen über* $\mathbb{R}$*. Dieser ist offensichtlich unendlich–dimensional; eine Basis wird gegeben durch die Folgen* $e_n := \big(\delta_{nm}\big)_m$ $(n \in \mathbb{N})$*. Es ist* $\|e_n\|_2 = 1$ *und*

$$\|e_N - e_n\|_2 = \big\|\big(\delta_{Nm} - \delta_{nm}\big)_m\big\|_2 = \sqrt{2} \quad \textit{für alle} \quad N > n \geq 1,$$

also ist die Folge (e_n) *keine Cauchy–Teilfolge, und kann damit auch keine normkonvergente Teilfolge besitzen. Für jede Folge* $x := (x_m) \in X$ *gilt aber*

$$\langle x, e_n\rangle_2 = x_n \xrightarrow{n} 0,$$

weil $\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 < \infty$ *ist. Dies ist gleichbedeutend mit (vgl. Satz 3.5)*

$$\varphi(e_n) \xrightarrow{n} 0 \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in X^*$$

und motiviert die

Definition 5.3 (Schwache Konvergenz)
Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *ein normierter Raum. Eine Folge* $(x_n) \subset X$ *heißt schwach konvergent gegen ein* $x \in X$*, falls gilt*

$$\varphi(x_n) \xrightarrow{n} \varphi(x) \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in X^*.$$

In diesem Fall schreiben wir $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$*.*

Man beachte, dass im Fall eines Hibertraums H *nach Satz 3.5 schwache Konvergenz* $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$ *äquivaelnt ist zu*

$$\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n} \langle x, y\rangle \quad \textit{für alle } y \in H.$$

Das schwache *Analogon zur Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft in unendlich–dimensionalen normierten Räumen* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *lautet dann:*

$$(x_n) \subset X,\ \sup_n \|x_n\| < \infty \quad \Longrightarrow \begin{cases} x_{n_k} \overset{k}{\rightharpoonup}: x \in X \\ \text{für eine Teilfolge } \big(x_{n_k}\big)_k. \end{cases} \tag{0.3}$$

Einen Raum X*, in dem* (0.3) *gilt nennt man auch* schwach (folgen–) kompakt. *Es folgen ein paar elemtare Eigenschaften der schwachen Konvergenz.*

Lemma 5.4
Seien X *ein normierter Raum,* $(x_n) \subset X$ *eine Folge und* $x \in X$*. Dann gilt:*

i) *Der schwache Limes von* (x_n) *ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt.*

ii) $\|x_n - x\| \overset{n}{\to} 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x.$

iii) $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x \quad \Longrightarrow \quad \|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ *(Unterhalbstetigkeit).*

iv) $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x \quad \Longrightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < \infty$ *(Normbeschränktheit).*

Ist X *ein Hilbert–Raum, so gilt die partielle Umkehrung von i):*

$$x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x \in X \text{ und } \|x_n\| \overset{n}{\to} \|x\| \quad \Longleftrightarrow \quad \|x_n - x\| \overset{n}{\to} 0. \tag{0.4}$$

Sei X *ei Hilbertraum* $U \subset X$ *abgeschlossen und konvex, dann ist* U *schwach abgeschlossen.*

Bemerkung.
Die Aussagen aus Lemma 5.4 gelten natürlich erstrecht bei starker Konvergenz. In diesem Fall hat man statt iii) allerdings die stärkere Aussage

$$x_n \overset{n}{\to} x \text{ (stark) in } X \quad \Longrightarrow \quad \|x\| = \lim_n \|x_n\|.$$

Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass in jedem normierten Raum auch die Dreiecksungleichung nach unten, also

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

für alle $x, y \in X$ *gilt.*

Lemma 5.5
Seien H *ein Hilbert–Raum und* $(x_n) \subset H$ *eine Folge, so dass* $\lim_n \varphi(x_n)$ *für alle* $\varphi \in H^*$ *existiert. Dann ist* (x_n) *schwach konvergent in* H.

Als Hilfsmittel benötigen wir .

Satz 5.6 (Hahn–Banach)
Seien $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *ein normierter Raum,* $U \subset X$ *ein Unterraum und* $\tau \in U^*$*. Dann gibt es eine Fortsetzung* $T \in X^*$ *von* τ*, d. h.* $T|_U = \tau$ *und* $\|T\|_\infty = \|\tau\|_\infty$*.*

Beweis: [Al] Satz 4.14 und Satz 4.15.

Satz 5.7 (Banach–Steinhaus)
Seien X *ein Banach–Raum,* Y *ein normierter Raum und* $(T_n) \subset \mathscr{L}(X, Y)$ *eine Folge stetiger linearer Operatoren derart, zu jedem* $x \in X$ *eine positive Konstante* $c = c(x)$ *existiert mit* $\sup_n \|T_n x\| \le c$*. Dann ist die Folge* (T_n) *beschränkt (bzgl. der Operator–Norm), d. h. es ist*

$$\sup_n \|T_n\|_\infty = \sup_n \sup_{x \in \overline{\mathbb{B}}} \|T_n x\| < \infty.$$

Beweis: GdV Kapitel 5.

Beweis von Lemma 5.5 *Wir zeigen zunächst, dass* (x_n) *beschränkt ist. Wir betrachten die* kanonische *Abbildung*

$$\imath : X \to X^{**},\ x \mapsto \imath_x$$

in den Bidualraum $X^{**} := \big(X^*\big)^*$ *von* X*, d. h. jedem* $x \in X$ *wird eine stetige lineare Abbildung* $\imath_x : X^* \to \mathbb{R}$ *zugeordnet, wobei* $\imath_x \varphi := \varphi(x)$ *für alle* $\varphi \in X^*$ *ist. Wegen* $|\imath_x \varphi| \le \|\varphi\|_\infty \|x\|$ *ist*

$$\|\imath_x\|_\infty = \sup_{\varphi \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|\imath_x \varphi|}{\|\varphi\|_\infty} \le \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in X,$$

weshalb $\imath$ *eine* Einbettung *ist. Man nennt* $\imath$ *die* kanonische Einbettung *von* X *in* X^{**} *und schreibt* $X \hookrightarrow X^{**}$*.*
Nach dem Satz von Hahn–Banach 5.6 können wir zu jedem $x \neq 0$ *ein* $\varphi \in X^*$ *so wählen, dass* $\|\varphi\|_\infty = 1$ *und* $\varphi(x) = \|x\|$*, also* $\|\imath_x \varphi\| = \|x\|$ *ist. Mithin ist* $\imath$ *eine lineare Isometrie . Sei nun* $T_n := \imath_{x_n} : X^* \to \mathbb{R}$ *für eine Folge* $(x_n) \subset X$*. Dann ist*

$$|T_n \varphi| = \big|\varphi(x_n)\big| \le c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},\ \varphi \in X^*,$$

nach dem Satz von Banach–Steinhaus 5.7 also $\sup_n \|T_n\|_\infty = \sup_n \|x_n\| < \infty$*. Für ein* $y \in H$ *gehört* $\langle \cdot, y\rangle$ *zu* H^**, d. h. die Abbildung* φ*, die gegeben ist durch* $\varphi(y) := \lim_n \langle x_n, y\rangle$ *ist wohldefiniert und linear. Mittels der Ungleichung von Cauchy–Schwarz wird* $\big|\varphi(y)\big| \le \limsup_n \|x_n\| \|y\|$ *und es ist* $\sup_n \|x_n\| < \infty$*,* *und damit* $\varphi \in H^*$*. Nach dem Satz von Riesz 3.5 existiert daher ein* $x \in H$ *mit* $\varphi = \langle \cdot, x\rangle$*, also*

$$\varphi(x_n) = \langle y, x_n\rangle \xrightarrow{n} \langle y, x\rangle = \varphi(x) \quad \text{für alle} \quad y \in H.$$

□

Wir kommen jetzt zu der schwachen Version des Satzes von Bolzano–Weierstraß in Hilbert–Räumen, welcher besagt, dass in Hilbert–Räumen das schwache Auswahlprinzip (0.3) *gilt.*

Satz 5.8 (Schwaches Auswahlprinzip in Hilbert–Räumen)
Seien H *ein Hilbert–Raum und* $(x_n) \subset H$ *eine* beschränkte *Folge, d. h. es gelte* $\sup_n \|x_n\| < \infty$*. Dann ist* (x_n) *schwach (folgen–) kompakt in* H*, d. h. es existiert eine Teilfolge* $\left(x_{n_k}\right)$ *von* (x_n) *und ein* $x \in H$*, so dass* $x_{n_k} \overset{k}{\rightharpoonup} x$*.* [a]

Bevor wir zum Beweis kommen, führen wir noch einen nützlichen Begriff ein: Wir sagen, ein normierter Raum X *sei* separabel*, falls* X *eine abzählbare Teilmenge* Ξ *besitzt, so dass* $\overline{\Xi} = X$ *ist. Mit anderen Worten soll es eine in* X *dicht liegende Menge* Ξ *geben, die gleichzeitig abzählbar ist. Ein einfaches endlichdimensionales Beispiel ist* $\mathbb{R}$*, da* $\mathbb{Q}$ *ja bekanntlich dicht in* $\mathbb{R}$ *liegt.*

Lemma 5.9
Ist H *ein Hilbert–Raum, und* $U \subset H$ *ein separabler Unterraum.*

a) Dann ist U *selbst ein Hilbert–Raum.*

b) Gilt das schwache Auswahlprinzip für alle seperablen Unterräume von H*, so gilt es auch in* H*.*

Beweis.
a) Sei (x_n) *Cauchy-Folge in* U*, dann ist* (x_n) *auch Cauchy-Folge in* H *und damit konvergent gegen* $x \in H$*. Zu zeigen bleibt* $x \in U$*. Sei* $\epsilon > 0$ *gegeben, dann gibt es* $x_n \in U$ *mit* $n = n(\epsilon)$ *so dass*

$$\|x - x_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zu $x_n \in U$ *gibt es wegen der Seperabilität von* U *ein* $\xi_n \in \Xi$ *(dabei gelte* $\overline{\Xi} = U$*) mit*

$$\|x_n - \xi_n\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \|x - \xi_n\| < \epsilon,$$

[a] Man beachte, dass in Hilbert–Räumen *folgenkompakt* und *überdeckungskompakt* gleichbedeutend sind, dies jedoch für *schwach folgenkompakt* i. a. falsch ist; es sei denn, der Raum ist separabel.

d.h. x lässt sich durch Elemente von Ξ approximieren also $x \in U = \overline{\Xi}$.
b) Sei $(x_n) \subset H$ eine beschränkte Folge, d. h. es gelte $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Wir betrachten den seperablen Unterraum $U = \overline{\text{span}\,\{x_1, x_2, ...\}}$. Dann ist $(x_n) \subset U$ beschränkt und daher existiert eine Teilfolge (x'_n) die schwach konvergent ist gegen ein $u \in U$ es folgt für $y \in H$ mit $y = w + v \in U \oplus U^\perp$

$$\langle x'_n, y\rangle = \langle x'_n, w\rangle \to \langle u, y\rangle,$$

d.h. $x'_n \rightharpoonup u$. □

Daher genügt es Satz 5.8 für sperable Räume zu beweisen.

Beweis von Satz 5.8.
Sei H separabel. Dann gibt es eine abzählbare Menge $\Xi := \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\} \subset H$, so dass $\overline{\Xi} = H$ ist. Wegen $\sup_n \|x_n\| < \infty$ ist $\big(\langle x_n, \xi_1\rangle\big)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß existiert daher der Limes

$$\alpha^1 := \lim_n \langle x_n^1, \xi_1\rangle$$

für eine Teilfolge (x_n^1) von (x_n). Desweitern können wir aus (x_n^1) eine Teilfolge (x_n^2) wählen, so dass auch

$$\alpha^2 := \lim_n \langle x_n^2, \xi_2\rangle$$

existiert. Sukzessive so fortfahrend erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge (x_n^k), so dass

$$\alpha^k := \lim_n \langle x_n^k, \xi_k\rangle$$

existiert, wobei (x_n^k) eine Teilfolge von (x_n^{k-1}) ist (setze $(x_n^0) := (x_n)$). Wir betrachten nun die Diagonalfolge $(\zeta_n) := (x_n^n)$. Dieselbe ist ab einem gewissen Index $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge von (x_n^k), und daher

$$\alpha^k = \lim_n \langle \zeta_n, \xi_k\rangle \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}, \; . \tag{0.5}$$

Seien nun $M := \sup_j \|x_j\|$, $\xi \in H$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da Ξ nach Voraussetzung dicht in H liegt, können wir ξ_k ($k \in \mathbb{N}$ fest) so wählen, dass

$$\|\xi - \xi_k\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

ausfällt. Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir dann mittels der Ungleichung von

Cauchy–Schwarz die Abschätzung

$$\begin{aligned}\big|\langle \zeta_m, \xi\rangle - \langle \zeta_n, \xi\rangle\big| &\le \big|\langle \zeta_m, \xi_k\rangle - \alpha^k\big| + \big|\langle \zeta_n, \xi_k\rangle - \alpha^k\big| \\ &\quad + \big|\langle \zeta_m, \xi - \xi_k\rangle\big| + \big|\langle \zeta_n, \xi - \xi_k\rangle\big| \\ &\le \big|\langle \zeta_m, \xi_k\rangle - \alpha^k\big| + \big|\langle \zeta_n, \xi_k\rangle - \alpha^k\big| + \varepsilon,\end{aligned}$$

weil offenbar $\|\zeta_n\| \le M$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist. Zusammen mit* (0.5) *ergibt sich daraus, dass* $\big(\langle \zeta_n, \xi\rangle\big) \subset \mathbb{R}$ *für jedes* $\xi \in H$ *eine Cauchy–Folge ist, so dass also* $\lim_n \langle \zeta_n, \xi\rangle$ *für jedes* $\xi \in H$ *existiert. Daraus folgt die Behauptung mit Lemma 5.5 und Satz 3.5.* □

Zur Lösung des ersten Problems betrachten wir Funktionen der Form

$$v^N(t,x) = \sum_{r=1}^{N} c_r^N(t)\omega^r(x), \quad N \in \mathbb{N},$$

wobei $c_r^N \in C^1[0,T]$ *gilt. Die Funktionen* ω^r *wählen wir als geeignetes ONS von* $\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$.

Satz 5.9

Ex existiert eine Folge $(\lambda_r) \subset \mathbb{R}$ *und eine Funktionenfolge* $(\omega_r) \subset \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit*

i) ω^r *ist Eigenvektor zum Eigenwert* λ_r *des sog. Stokes-Operators:*

$$\langle \omega^r, \varphi\rangle_{\mathring{W}^{1,2}} = \lambda_r \int_\Omega \omega^r \cdot \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d),$$

ii) $\int_\Omega \omega_r \omega_s \, dx = \delta_{rs}$ *für alle* $r, s \in \mathbb{N}$,

iii) $1 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ *und* $\lambda_r \to \infty$,

iv) $\langle \frac{\omega^r}{\sqrt{\lambda^r}}, \frac{\omega^s}{\sqrt{\lambda^s}}\rangle_{\mathring{W}^{1,2}} = \delta_{rs}$ *für alle* $r, s \in \mathbb{N}$.

v) (ω_r) *it eine Basis von* $\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$.

Beweis: *Die Konstruktion erfolgt iterativ, zunächst betrachten wir*

$$\frac{1}{\lambda_1} := \sup_{v \in \mathring{W}^{1,2}_{div}, \|v\|=1} \int_\Omega |v|^2 \, dx \le 1.$$

Es existiert nach Definiton des Supremums eine Folge $(v_k) \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\int_\Omega |v_k|^2 \, dx \to \frac{1}{\lambda_1}, \quad \|v_k\| = 1.$$

Wir wählen nach Satz 5.8 und Kondrachov eine schwach konvergente $(\tilde v_k) \subset (v_k)$ *mit*

$$\begin{aligned} \tilde v_k &\rightharpoonup \omega^1 \quad \text{in } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d) \\ \tilde v_k &\to \omega^1 \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

mit einer Funktion $\omega^1 \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *(vgl. Lemma 5.4 vi). Es folgt*

$$\frac{1}{\lambda_1} = \int_\Omega |\omega^1|^2 \, dx.$$

Wegen Lemma 5.4 iii) ist $\|\omega^1\| \le 1$. *Tatsächlich ist* $\|\omega^1\| = 1$, *sonst würde die Funktion* $\omega := \omega^1/\|\omega^1\| \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *den Bedingungen*

$$\|\omega\| = 1, \qquad \int_\Omega |\omega|^2 \, dx = \frac{1}{\|\omega^1\|_{1,2}} \int_\Omega |\omega^1|^2 \, dx > \frac{1}{\lambda_1}$$

genügen, was ein Widerspruch zur Definition von λ_1 *ist. Zu zeigen ist noch, dass* (ω^1, λ_1) *auch i) erfüllen. Dazu betrachten wir eine beliebige Funktion* $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *sowie*

$$\Phi(t) := \frac{1}{\langle \omega^1 + t\varphi, \omega^1 + t\varphi \rangle} \int_\Omega |\omega^1 + t\varphi|^2 \, dx.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} \Phi(t)\big|_{t=0} &= \frac{2\int_\Omega \omega^1 \cdot \varphi \, dx \langle \omega^1, \omega^1 \rangle - 2\int_\Omega |\omega^1|^2 \, dx \langle \omega^1, \varphi \rangle}{\langle \omega^1, \omega^1 \rangle^2} \\ &= 2\int_\Omega \omega^1 \cdot \varphi \, dx - \tfrac{2}{\lambda_1} \langle \omega^1, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\lambda_1 \int_\Omega \omega^1 \cdot \varphi \, dx = \langle \omega^1, \varphi \rangle$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Ersetzen wir* ω^1 *durch* $\sqrt{\lambda_1}\omega^1$ *folgt die Behauptung für* $r, s = 1$.

Nehmen wir an, die Konstruktion der ersten $N \in \mathbb{N}$ *Eigenvektoren* $(\omega^r)_{r=1}^N$ *mit zugehörigen Eigenwerten* $(\lambda_r)_{r=1}^N$ *sei abgeschlossen sowie ii)-iv). Wir definieren*

$$W^N := \left\{ v \in \mathring{W}^{1,2}_{\text{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d);\ \langle \omega^i, v \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Wir finden wie in obiger Konstruktion $\omega^{N+1} \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\int_\Omega |\omega^{N+1}|^2 \, dx = \sup_{v \in W^N, \|v\|=1} \int_\Omega |v|^2 \, dx =: \frac{1}{\lambda_{N+1}}.$$

Da W^N *konvex und normabgeschlossen ist, ist* $\omega^{N+1} \in W^N$*, d.h.*

$$\langle \omega^i, \omega^{N+1} \rangle = 0, \quad i = 1, ..., N.$$

Wie im ersten Teil des Beweises zeigt man

$$\lambda_{N+1} \int_\Omega \omega^{N+1} \cdot \varphi \, dx = \langle \omega^{N+1}, \varphi \rangle$$

für alle $\varphi \in W^N$*. Ist* $\varphi \in (W^N)^\perp$*, so ist* $\varphi \in \operatorname{span}\{\omega^1, ..., \omega^N\}$*, d.h.*

$$\begin{aligned} \lambda_{N+1} \int_\Omega \omega^{N+1} \cdot \varphi \, dx &= \lambda_{N+1} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_\Omega \omega^{N+1} \cdot \omega^i \, dx \\ &= \lambda_{N+1} \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \langle \omega^{N+1}, \omega^i \rangle = 0 = \lambda_{N+1} \langle \omega^{N+1}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

da $\omega^1, ..., \omega^N$ *Eigenvektoren sind. Somit haben wir*

$$\lambda_{N+1} \int_\Omega \omega^{N+1} \cdot \varphi \, dx = \langle \omega^{N+1}, \varphi \rangle$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$*. Zuletzt müssen wir wieder* ω^{N+1} *durch* $\sqrt{\lambda_{N+1}}\omega^{N+1}$ *ersetzen.*
Wir zeigen noch, dass die Folge λ_r *monoton wachsend ist und gegen unendlich strebt. Dabei folgt aus* $W^{N+1} \subset W^N$

$$\frac{1}{\lambda_{N+1}} = \sup_{v \in W^{N+1}, \|v\|=1} \int_\Omega |v|^2 \, dx \leq \sup_{v \in W^N, \|v\|=1} \int_\Omega |v|^2 \, dx = \frac{1}{\lambda_N}$$

und damit die Monotonie. Nehemn wir an (λ_r) *sei beschränkt, es folgt dass* $\lim_r \lambda_r =: \lambda$ *existiert. Wegen* $\|\omega^r\| = 1$ *erhalten wir mit dem Satz von Kondrachov die Existenz einer konvergenten Teilfolge* ω^{r_k} *mit*

$$\omega^{r_k} \to: \omega \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad k \to \infty. \tag{0.6}$$

Dies zeigt für $r_l \neq r_k$

$$2 = \langle \omega^{r_k} - \omega^{r_l}, \omega^{r_k} - \omega^{r_l} \rangle = \lambda_{r_k} \int_\Omega \omega^{r_k} \cdot (\omega^{r_k} - \omega^{r_l}) \, dx$$

$$- \lambda_{r_l} \int_\Omega \omega^{r_l} \cdot (\omega^{r_k} - \omega^{r_l})\, dx.$$

Aus (0.6) und der Beschränktheit von λ_r folgt, dass die rechte Seit gegen Null konvergiert, ein Widerspruch. Dies zeigt

$$\lim_{r \to \infty} \lambda_r = \infty.$$

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass (ω_r) eine Basis ist. Wir definieren

$$X := \operatorname{span}\left\{\omega^1, ..., \omega^N, ...\right\}$$

und nehmen an $X \neq \mathring{W}^{1,2}_{\text{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Dann existiert $\Psi \in X^\perp$, d.h. $\langle \Psi, \omega^r \rangle = 0$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Wir können dabei annehmen dass $\|\Psi\| = 1$ ist (sonst normiere man). Als Konsequenz ist

$$\int_\Omega |\Psi|^2\, dx \leq \sup_{v \in W^r, \|v\|=1} \int_\Omega |v|^2\, dx = \frac{1}{\lambda_r} \longrightarrow 0.$$

Daher ist $\Psi = 0$, ein Widerspruch zu $\|\Psi\| = 1$. Somit ist (ω_r) eine Basis von $\mathring{W}^{1,2}_{\text{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. □

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage Satz 5.2 zu beweisen.

Schritt 1: Approximation

Wir definieren

$$u^N(t,x) = \sum_{r=1}^N c_r^N(t) \omega^r(x), \quad N \in \mathbb{N},$$

mit den Funktionen ω^r aus Satz 5.9 und noch unbekannten $c_r^N : [0,T] \to \mathbb{R}$. Wir suchen u^N als Lösung von

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u^N : \nabla \omega^r\, dx &= - \int_\Omega u_t^N \cdot \omega^r\, dx + \int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla \omega^r\, dx \\ &\quad + \int_\Omega f \cdot \omega^r\, dx, \quad r = 1, ..., N \\ u^N(0, \cdot) &= P^N u_0. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Hierbei ist P^N der Projektionsoperator

$$P^N : \mathring{W}^{1,2}_{\text{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d) \to H^N := \operatorname{span}\left\{\omega^1, ..., \omega^N\right\}$$

$$P^N(v) := \sum_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega \omega^i \cdot v \, dx \right) \omega^i$$

Benutzen wir die Summenschreibweise für u^N und die Orthogonalität aus Satz 5.9, so ergibt sich aus (0.7)

$$\begin{aligned} c_r^N \int_\Omega \nabla\omega^r : \nabla\omega^r \, dx &= -\frac{dc_r^N}{dt} \int_\Omega \omega^r \cdot \omega^r \, dx + \sum_{l,k} c_l^N c_k^N \int_\Omega \omega^l \otimes \omega^k : \nabla\omega^r \, dx \\ &\quad + \int_\Omega f \cdot \omega^r \, dx, \quad r = 1, ..., N \qquad (0.8) \\ \sum_{i=1}^{N} c_i^N(0)\omega^i &= \sum_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega \omega^i \cdot u_0 \, dx \right) \omega^i. \end{aligned}$$

Benutzten wir auch in der zweiten Gleichung die Orthogonalität, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dc_r^N}{dt} &= c_r^N \lambda_r + \sum_{l,k} c_l^N c_k^N \int_\Omega \omega^l \otimes \omega^k : \nabla\omega^r \, dx + \int_\Omega f \cdot \omega^r \, dx, \quad r = 1, ..., N \\ c_r^N(0) &= \int_\Omega \omega^r \cdot u_0 \, dx, \quad r = 1, ..., N. \qquad (0.9) \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass (0.9) eine Lösung auf $[0, T]$ besitzt. Betrachten wir die vektorwertige Funktion $C^N = (c_r^N)_{r=1}^N$, so ist (0.9) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{dC^N}{dt} &= \mathcal{B}(C^N, C^N) + LC^N + \xi_0 \\ C^N(0) &= c_0. \qquad (0.10) \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Bilinearform $\mathcal{B}$, linearer Abbildung L und zwei Vektoren ξ_0, c_0. Aufgrund der Bilinearform ist die rechte Seite (als Funktion von C^N) nur lokal Lipschitz-stetig, d.h. der Satz von Picard-Lindelöff liefert nur eine lokale Lösung, was für unsere Zwecke nicht ausreicht. Hierbei hilft folgendes Lemma (vgl. Zeidler [Ze])

Lemma 5.10 *Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$y' = F(t, y), \quad y(0) = y_0$$

mit F stetig in t und Lipschitz in Y. Eine potentielle Lösung erfülle

$$|y(t)| \leq C \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \qquad (0.11)$$

Dann existiert eine globale Lösung auf dem Intervall $[0, T]$.

Wir müssen also die Beschränktheit der C^N in t zeigen (unter der Annahme ihrer Existenz). Dazu multiplizieren wir die r-te Gleichung von (0.7) mit c_r^N und summieren die Gleichungen auf. Unter Verwendung von $u^N = \sum_{r=1}^N c_r^N \omega^r$ folgt

$$\int_\Omega \nabla u^N : \nabla u^N \, dx = -\int_\Omega u_t^N \cdot u^N \, dx + \int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla u^N \, dx + \int_\Omega f \cdot u^N \, dx.$$

Nach Konstruktion ist $u^N(t,\cdot) \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ für alle t, so dass der Term $\int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla u^N \, dx$ verschwindet und wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^N|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u^N|^2 \, dx = \int_\Omega f \cdot u^N \, dx$$

erhalten. Integration über $[0,s]$ mit $0 < s \le T$ liefert

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u^N(s,\cdot)|^2 \, dx + \int_{Q_s} |\nabla u^N|^2 \, dx = \int_{Q_s} f \cdot u^N \, dx \, dt.$$

Wegen $f \in L^2(Q_T)$ lässt sich die rechte Seit abschätzen durch

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}\int_{Q_s} |f|^2 \, dx \, dt + \tau \int_0^s \int_\Omega |u_N|^2 \, dx \, dt \\ &\le \frac{1}{\tau}\int_{Q_s} |f|^2 \, dx \, dt + \tau c \int_0^s \int_\Omega |\nabla u_N|^2 \, dx \, dt, \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung von Sobolev benutzt haben. Wählen wir $\tau = 1/2c$, ergibt sich

$$\int_\Omega |u^N(s,\cdot)|^2 \, dx + \int_{Q_s} |\nabla u^N|^2 \, dx \le c \int_{Q_T} |f|^2 \, dx \, dt$$

für alle Dies impliziert

$$u^N \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)) \quad \textit{uniform}, \tag{0.12}$$
$$u^N \in L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)) \quad \textit{uniform}. \tag{0.13}$$

Aus (0.12) können wir jetzt leicht (0.11) herleiten: Es ist wegen Satz 5.9

$$\int_\Omega |u^N|^2 \, dx = \sum_{r=1}^N |c_r^N|^2 \int_\Omega |\omega^r|^2 \, dx = \sum_{r=1}^N |c_r^N|^2 \ge |c_r^N|^2$$

für alle $r \in \{1, .., N\}$. In Kombination mit (0.12) folgt (0.11).
Lemma 0.11 zeigt also die Existenz einer Lösung $u^N \in L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ von (0.7). Außerdem haben wir mit (0.12) und (0.13) zwei sehr nützliche a priori Abschätzungen.

Schritt 2: Schwache Konvergenz

Um die Existenz einer Lösung zu beweisen benötigen wir einen schwachen Limites von u^N. Dazu genügt es uns die Beschränkheit von u^N (im passeneden Raum) zu wissen und zu einer Teilfolge überzugehen (vgl. Satz 5.8). In (0.13) haben wir bereits die Beschränktheit von u^N in $L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$. Zusätzlich taucht in unserer Gleichung der Term u_t auf. Wir müssen also noch u^N_t beschränken. Wir benutzen eine beliebige Testfunktion
$\varphi \in L^2(0,T;\mathring{W}^{3,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ mit

$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;\mathring{W}^{3,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))} \leq 1$$

und erhalten aus (0.7)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u^N : \nabla\omega^r\,dx = -\int_\Omega u^N_t \cdot \omega^r\,dx + \int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla\omega^r\,dx\\ + \int_\Omega P^N f \cdot \omega^r\,dx, \quad r = 1, ..., N\end{aligned}$$

was wiederum

$$\int_\Omega u^N_t \cdot \varphi\,dx = -\int_\Omega \nabla u^N : \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega P^N f \cdot \varphi\,dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ ergibt. Hierbei ging maßgeblich ein, dass (ω^r) eine ONB des $\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ ist (vgl. Satz 5.9). Man beachte, dass für $\varphi = \omega_r$ mit $r > N$ alle Integrale verschwinden abgesehen von $\int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla\varphi\,dx$, weshalb auch dieses Integral gleich Null sein muss. Somit haben nur die ersten N Elemente der Basis einen Beitrag. Man beachte, für $v \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|P^N v\|_2^2 = \int_\Omega |P^N v|^2\,dy = \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega v \cdot \omega^i\,dx\right)^2 |\omega^i|^2\,dy\\ \leq \sum_{i=1}^\infty \left(\int_\Omega v \cdot \omega^i\,dx\right)^2 |\omega^i|^2\,dy = \int_\Omega |v|^2\,dy = \|v\|_2^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_T} P^N f \cdot \varphi \, dx\right| &\leq \left(\int_{Q_T} |P^N f|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_T} |\varphi|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\int_{Q_T} |f|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_T} |\nabla^3 \varphi|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\int_{Q_T} |f|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Weiterhin folgt mit den Ungleichungen von Hölder und Sobolev $\mathring{W}^{3,2} \hookrightarrow W^{1,\infty}$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{Q_T} u^N \otimes u^N : \nabla\varphi \, dx \, dt\right| \leq \int_0^T \|u^N\|^2_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \, dt \\ &\leq c \int_0^T \|\nabla\varphi\|_{W^{3,2}(\Omega)} \, dt \leq c \left(\int_0^T \|\nabla\varphi\|^2_{W^{3,2}(\Omega)} \, dt + 1\right) \leq c\end{aligned}$$

wenn wir (0.13) verwenden. Zuletzt sehen wir

$$\left|\int_{Q_T} \nabla u^N : \varphi \, dx \, dt\right| \leq \quad c \left(\int_{Q_T} |\nabla u^N|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_T} |\nabla\varphi|^2 \, dx \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \; c.$$

Insgesamt folgt für die $(L^2(0,T;\mathring{W}^{3,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))^*$*-Norm von* u_t^N

$$\|u_t^N\|^* = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \int_{Q_T} u_t^N \cdot \varphi \, dx \, dt \leq c. \tag{0.14}$$

Betrachten wir (0.12), (0.13) und (0.14) mit Lemma 5.1 so folgt die Existenz einer Teilfolge $(\tilde{u}^N) \subset u^N$ *mit*

$$\tilde{u}^N \rightharpoonup u \quad \text{in } \; L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)) \tag{0.15}$$

$$\tilde{u}^N \to u \quad \text{in } \; L^2(0,T;L^4(\Omega,\mathbb{R}^d)) \tag{0.16}$$

mit einer Funktion $u \in L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$*, wobei wir natürlich Satz 5.8 benutzt haben.*

Schritt 3: Grenzübergang

Zunächst betrachten wir Testfuktionen der Form

$$\psi(t,x) = g(t)\omega^r(x)$$

mit $g \in C_0^\infty(-\infty, T)$, *so folgt aus (0.7)*

$$\int_\Omega \nabla u^N : \nabla(g\omega^r)\,dx = -\int_\Omega u_t^N \cdot g\omega^r\,dx + \int_\Omega u^N \otimes u^N : \nabla(g\omega^r)\,dx + \int_\Omega f \cdot g\omega^r\,dx.$$

Integration über $[0,T]$ *ergibt*

$$\int_{Q_T} \nabla u^N : \nabla\psi\,dx\,dt = -\int_{Q_T} u_t^N \cdot \psi\,dx\,dt + \int_{Q_T} u^N \otimes u^N : \nabla\psi\,dx\,dt + \int_{Q_T} f \cdot \psi\,dx\,dt$$

für alle ψ *mit obiger Gestalt. Es folgt aus (0.16)*

$$\begin{aligned}
&\|u^N \otimes u^N - u \otimes u\|_{L^1(0,T;L^2)} \\
&\le \|u^N \otimes (u^N - u)\|_{L^1(0,T;L^2)} + \|u \otimes (u^N - u)\|_{L^1(0,T;L^2)} \\
&\le \int_0^T \|u\|_{L^4(\Omega)}\|u^N - u\|_{L^4(\Omega)}\,dt + \int_0^T \|u^N\|_{L^4(\Omega)}\|u^N - u\|_{L^4(\Omega)}\,dt \\
&\le \left\{\left(\int_0^T \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \|u^N\|^2_{L^4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left(\int_0^T \|u^N - u\|^2_{L^4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

und daher

$$u^N \otimes u^N \to u \otimes u \quad in\ \ L^1(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)). \tag{0.17}$$

Dies ergibt

$$\int_{Q_T} u^N \otimes u^N : \nabla\psi\,dx\,dt \longrightarrow \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla\psi\,dx\,dt. \tag{0.18}$$

Man beachte dabei die Abschätzung (beachte $\psi = g(t)\omega_r(x)$*)*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} (u^N \otimes u^N - u \otimes u) : \nabla\psi\,dx\,dt\right| \le \int_0^T \|u^N \otimes u^N - u \otimes u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\le \|g\|_{L^\infty(0,T)}\|\omega_r\|_{L^2(\Omega)}\int_0^T \|u^N \otimes u^N - u \otimes u\|_{L^2(\Omega)}\,dt.
\end{aligned}$$

Andererseits sehen wir mit (0.15)

$$\int_{Q_T} \nabla u^N : \nabla\psi\,dx\,dt \longrightarrow \int_{Q_T} \nabla u : \nabla\psi\,dx\,dt. \tag{0.19}$$

Letzendlich erhalten wir

$$\int_{Q_T} u_t^N \cdot \psi \, dx \, dt = \int_\Omega \int_0^T (u^N \cdot g\omega^r)_t \, dt \, dx - \int_\Omega \int_0^T u^N \cdot g'\omega^r \, dt \, dx$$
$$= - \int_\Omega u_0^N \cdot \omega^r \, dx \, g(0) - \int_0^T \int_\Omega u^N \cdot \psi_t \, dx \, dx.$$

Wegen (0.15) und $P^N u_0 \to u_0$ *in* $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *folgt*

$$\int_{Q_T} u_t^N \cdot \psi \, dx \longrightarrow - \int_\Omega u_0 \cdot \psi(0) \, dx - \int_{Q_T} u \cdot \psi_t \, dx \, dx. \tag{0.20}$$

Zusammengefasst impliziert (0.18)-(0.20)

$$\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \psi \, dx \, dt = \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla \psi \, dx \, dt + \int_{Q_T} f \cdot \psi \, dx \, dt$$
$$- \int_\Omega u_0 \cdot \psi(0) \, dx - \int_{Q_T} u \cdot \psi_t \, dx \, dx$$

für alle ψ *der Menge*

$$Y := \left\{ \sum_{r=1}^N g\omega^r, \; g \in C_0^\infty(-\infty, T), \; N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir zeigen nun, dass Y *dicht in der Menge* $C_0^\infty(O_T, \mathbb{R}^d)$ *liegt bzgl. der Norm in* $L^2((0,T), \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$. *Dann sind beliebige Testfunktionen* $\varphi \in C_0^\infty(O_T, \mathbb{R}^d)$ *zulässig und der Beweis ist abgeschlossen. Sei* $\varphi \in C_0^\infty(O_T, \mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div} \varphi = 0$ *als* $\varphi \in L^2((0,T), \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$. *Dann existiert eine einfache Funktion*

$$\psi_m(t) = \sum_{k=1}^m \chi_{A_k}(t) \varphi_k, \tag{0.21}$$

wobei A_k *eine disjunkte Zerlegung von* $[0,T]$ *ist und* $\varphi_k \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\|\psi_m - \varphi\|_{L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2})} < \tfrac{1}{2m}. \tag{0.22}$$

Wegen $\chi_{A_k} \in L^2(0,T)$ *und* $C_0^\infty(0,T)$ *dicht in* $L^2(0,T)$ *liegt (vgl. Satz 2.9) existiert* $(g_k)_{k=1}^m \subset C_0^\infty(0,T)$ *mit*

$$\sum_{k=1}^m \|\chi_{A_k} - g_k\|_2 \|\varphi_k\|_{\mathring{W}^{1,2}} < \tfrac{1}{2m}. \tag{0.23}$$

Kombinieren wir (0.22) und (0.23), so folgt

$$\begin{aligned}
&\|\varphi - \sum_{k=1}^{m} g_k\varphi_k\|_{L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2})} \\
&\le \|\varphi - \psi_m\|_{L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2})} + \|\sum_{k=1}^{m}(\chi_{A_k} - g_k)\varphi_k\|_{L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2})} \\
&\le \|\varphi - \psi_m\|_{L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2})} + \sum_{k=1}^{m}\|\chi_{A_k} - g_k\|_2\|\varphi_k\|_{\mathring{W}^{1,2}} \le \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\sum_{k=1}^m g_k\varphi_k \to \varphi$ in $L^2((0,T),\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ gezeigt. Wegen $\varphi_k \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ kann es durch endliche Linearkombinationen der Basis (ω_r) approximiert werden, ergo lässt sich φ durch ein Element aus Y approximieren.

Dies beweist schließlich Satz 5.2. □

Im folgenden wollen wir ein paar Eigenschaften der schwachen Lösung studieren. Das folgende Lemma ist dazu sehr nützlich.

Lemma 5.11 *Sei $0 < T < \infty$, $1 \le p < \infty$ und X ein Banachraum. Weiterhin sei $\mathcal{M}$ dicht in $L^p(0,T;\mathbb{R})$ und X_0 dicht in X. Dann ist*

$$\operatorname{span}\{\psi(t,x) = g(t)\varphi(x);\ g \in \mathcal{M},\ \varphi \in X_0\}$$

dicht in $L^p(0,T;X)$.

Der Beweis von Teil erfolgt wie am Ende es Beweises von Theorem 5.2 (für Details siehe [Nau], Satz 2.4). Inbesondere folgt damit, dass die Menge

$$\operatorname{span}\left\{\psi(t,x) = g(t)\varphi(x);\ g \in C_0^\infty(0,T),\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d)\right\}$$

dicht in $L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^d))$, $1 \le p < \infty$, liegt. Also liegt auch $C_0^\infty(Q_T,\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^d))$. Die Aussagen gelten natürlich auch für divergenzfreie Funktionen.

Lemma 5.12 *Sei $u \in L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ Lösung von (WINSP). Dann gilt*

a) $u \in L^{2\frac{d+2}{d}}(Q_T,\mathbb{R}^d)$;

b) $\partial_t u \in L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))^*$ für $p = \frac{d+2}{d}$;

c) $u \in C^0_w(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^d))$, d.h. $u(t,\cdot) \rightharpoonup u(t_0,\cdot)$ in $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ für $t \to t_0$;

d) $u(0,\cdot) = u_0$ fast überall auf Ω.

Beweis.

a) Wir wissen $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ und damit ist im Fall $d \geq 3$ unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung mit $\frac{d}{2}$ und $\frac{d}{d-2}$ und der Ungleichung von Sobolev

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |u|^{2\frac{d+2}{d}}\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega |u|^{2\frac{2}{d}}|u|^2\,dx\,dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{2}{d}} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{d}} dt \\
&\leq c\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{2d}2} dt \leq c\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dt \leq c.
\end{aligned}$$

Im Fall $d = 2$ benutzen wir zunächst die Ungleichung

$$\|v\|_4 \leq c\|v\|_2^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_2^{\frac{1}{2}}, \quad v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega). \tag{0.24}$$

Hierbei genügt es den Fall $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zu betrachten, da die allgemiene Aussage dann durch Approximation folgt. Für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist

$$v^2(x) = v^2(x_1,x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_1} v(\xi_1,x_2)\partial_1 v(\xi_1,x_2)\,d\xi_1$$

und damit

$$v^2(x) \leq 2\nu_1(x_2), \quad \nu_1(x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} |v(\xi_1,x_2)||\partial_1 v(\xi_1,x_2)|\,d\xi_1.$$

Analog gilt auch

$$v^2(x) \leq 2\nu_2(x_1), \quad \nu_2(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} |v(x_1,\xi_2)||\partial_2 v(x_1,\xi_2)|\,d\xi_2.$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |v|^4\,dx &\leq 4\int_{\mathbb{R}^2} \nu_1(x_2)\nu_2(x_1)\,dx_1\,dx_2 \\
&\leq 4\left(\int_{-\infty}^\infty \nu_1(x_2)\,dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^\infty \nu_2(x_1)\,dx_1\right) \\
&\leq 4\|v\|_2^2\|\partial_1 v\|_2\|\partial_2 v\|_2 \\
&\leq 4\|v\|_2^2\|\nabla v\|_2^2
\end{aligned}$$

was (0.24) impliziert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} |u|^4 \, dx \, dt &\le c \int_0^T \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right) \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right) dt \\ &\le c \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dt \le c.\end{aligned}$$

b) wir wissen nach a) $u \otimes u \in L^{\frac{d+2}{d}}(Q_T, \mathbb{R}^d)$. *Aus der Gleichung folgt für* $p = \frac{d+2}{2} \ge 2$

$$\begin{aligned}\left| \int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx \, dt \right| &\le c\|\nabla \varphi\|_{L^2(Q_T)} + c\|\varphi\|_{L^2(Q_T)} + c\|\nabla \varphi\|_{L^p(Q_T)} \\ &\le c\|\nabla \varphi\|_{L^p(Q_T)} = c\|\varphi\|_{L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p})}\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(Q_T, \mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div} \varphi = 0$. *Da* $C_0^\infty(Q_T, \mathbb{R}^d)$ *dicht in* $L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$ *liegt (vgl. Lemma 5.11) können wir durch*

$$\int_{Q_T} u_t \cdot \varphi \, dx \, dt = - \lim_m \int_{Q_T} u \cdot \varphi_t^m \, dx \, dt$$

ein lineares Funktional auf $L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$ *definieren,*
d.h.

$$\partial_t u \in L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))^* = L^{p'}(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)^*),$$

für die Dualitätsbeziehung siehe [Ze] Proposition 23.7.
c) Eine Variante des Satzes von Sobolev für Bochner-Räume besagt (siehe [Nau], Satz 3.4)

$$\big\{ u \in L^1(0,T;Y), \ \partial_t u \in L^1(0,T;Y) \big\} \subset C^0(0,T;Y)$$

für einen Banachraum Y. *Wir wählen* $Y = \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)^*$ *und erhalten durch die Inklusion* $\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d) \cong \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)^* \subset \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)^*$ *schließlich*

$$u \in C^0(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)^*). \tag{0.25}$$

Wir wollen die Stetigkeit aber bezüglich $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *zeigen. Sei also* $(t_k) \subset [0,T]$ *mit* $t_k \to t_0$ *und* $u(t_k, \cdot) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Wegen* $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega, \mathbb{R}^d))$ *ist* $u(t_k, \cdot)$ *beschränkt in* $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Außerdem folgt aus (0.25)*

$$u(t_k, \cdot) \to u(t_0, \cdot) \quad \textit{in } \mathring{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)^*. \tag{0.26}$$

Wir wissen also

$$\lim_k \int_\Omega u(t_k,\cdot)\cdot\varphi\,dx = 0, \quad \varphi \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^d).$$

Zu $v \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *existiert* $(v_m) \subset C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit* $v_m \to v$ *in* $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$, *so dass*

$$\begin{aligned}\left|\lim_k \int_\Omega u(t_k,\cdot)\cdot v\,dx\right| &\le \left|\lim_k \int_\Omega u(t_k,\cdot)\cdot(v-v_m)\,dx\right| + \left|\lim_k \int_\Omega u(t_k,\cdot)\cdot v_m\,dx\right| \\ &\le \sup_k \|u(t_k,\cdot)\|_2 \|v_m - v\|_2 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Der Satz von Riesz ergibt $u(t_k,\cdot) \rightharpoonup u(t_0,\cdot)$ *in* $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$, *also ist* $u \in C_w^0(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^d))$.
d) Wir wissen

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \nabla u : \nabla\psi\,dx\,dt &= \int_{Q_T} u\otimes u : \nabla\psi\,dx\,dt + \int_{Q_T} f\cdot\psi\,dx\,dt \\ &\quad - \int_\Omega u_0\cdot\psi\,dx - \int_{Q_T} u\cdot\psi_t\,dx\,dt.\end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $\psi(x,t) = g(t)\varphi(x)$ *mit* $g \in C_0^\infty(-\infty,T)$ *und* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div}\varphi = 0$. *Betrachten wir eine Funktion* g_ϵ *mit* $g_\epsilon(0) = 1$ *und* $g_\epsilon(t) = 0$ *für* $t \ge \epsilon$. *Dann ist*

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0} \int_{Q_T} g_\epsilon\,\nabla u : \nabla\varphi\,dx\,dt = 0,\\ &\lim_{\epsilon\to 0} \int_{Q_T} g_\epsilon\,u\otimes u : \nabla\varphi\,dx\,dt = 0,\\ &\lim_{\epsilon\to 0} \int_{Q_T} g_\epsilon\,f\cdot\varphi\,dx\,dt = 0.\end{aligned}$$

Wir betrachten noch das letzte Integral und approximieren u *mit Hilfe des Steklov-Durchschnitts*

$$u_h(t,x) := \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s,x)\,dx, \quad h > 0.$$

Es folgt (vgl. Übung A 20 und 22) für alle $\rho > 0$

- $u_h \longrightarrow u$ *in* $L^2(0,T-\rho;\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d))$;
- $\partial_t(u_h) = (\partial_t u)_h \longrightarrow \partial_t u$ *in* $L^2(0,T-\rho;\mathring{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^d)^*)$;
- $u_h(t,\cdot) \rightharpoonup u(t,\cdot)$ *in* $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *für alle* $0 \le t \le T-\rho$.

Die dritte Konvergenz bedarf einer Erläuterung: sei $\varphi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_h(t,\cdot)\cdot\varphi\,dx &= \frac{1}{h}\int_\Omega\int_t^{t+h} u(s,\cdot)\,ds\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega\int_0^1 u(t+sh,\cdot)\,ds\cdot\varphi\,dx\\ &= \int_0^1\int_\Omega u(t+sh,\cdot)\cdot\varphi\,dx\,ds.\end{aligned}$$

Wegen $u \in C^0_w(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^d))$ nach c) erhalten wir

$$\lim_{h\to h}\int_\Omega u(t+sh,\cdot)\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega u(t,\cdot)\cdot\varphi\,dx \quad \textit{für alle } 0\le t\le T-\rho.$$

Außerdem folgt aus $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^d))$

$$\left|\int_\Omega u(t+sh,\cdot)\cdot\varphi\,dx\right| \le \|u(t+sh,\cdot)\|_2\|\varphi\|_2 \le c\|\varphi\|_2$$

unabhängig von h. Majorisierte Kovergenz ergibt

$$\lim_h \int_\Omega u_h(t,\cdot)\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega u(t,\cdot)\cdot\varphi\,dx$$

und daher $u_h(t,\cdot) \rightharpoonup u(t,\cdot)$ in $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ für alle $0\le t\le T-\rho$.
Es folgt (siehe Übung A 22 für Schritt 3)

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} u\cdot\psi_t\,dx\,dt &= \lim_h\int_{Q_T} u_h\cdot\psi_t\,dx\,dt\\ &= \lim_m\int_{Q_T}(u_h\cdot\psi)_t\,dx\,dt - \lim_m\int_{Q_T}\partial_t(u_h)\cdot\psi\,dx\,dt\\ &= \lim_m\int_{Q_T}(u_h\cdot\psi)_t\,dx\,dt - \lim_h\int_0^T\langle(\partial_t u)_h,\psi\rangle\,dt\\ &= -\lim_h\int_\Omega(u_h\cdot\psi)(0,\cdot)\,dx - \int_0^T\langle\partial_t u,\psi\rangle\,dt\\ &= -\int_\Omega u(0,\cdot)\cdot\varphi(0,\cdot)\,dx - \int_0^T\langle\partial_t u,\psi\rangle\,dt.\end{aligned}$$

Wegen $\partial_t u \in L^p(0,T;\mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))^*$ und $\varphi \in \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d)$ ist

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T\langle\partial_t u,\psi\rangle\,dt\,dt = 0$$

und es folgt insgesamt

$$\int_\Omega u_0 \cdot \varphi \, dx - \int_{Q_T} u(0,\cdot) \cdot \varphi \, dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *Das Fundamentallemma der Variationsrechnung zeigt* $u_0 = u(0,\cdot)$ *f.ü.* □

Wir können die Klasse der zulässigen Testfunktionen noch ausdehnen. Außer im Fall d = 2 ist die Lösung selbst aber nicht zulässig.

Lemma 5.13 *Sei* $u \in L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$ *Lösung von (WINSP). Dann erfüllt u die Gleichung*

$$\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla \varphi \, dx + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx - \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle \, dt$$

für alle $\varphi \in L^p(0,T; \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$.

Beweis.
Aus dem Beweis von Lemma 5.12 wissen wir

$$\int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx \, dt = - \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle \, dt.$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(Q_T, \mathbb{R}^d)$ *und damit*

$$\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla \varphi \, dx + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx - \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle \, dt$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(Q_T, \mathbb{R}^d)$. *Sei* $\varphi \in L^p(0,T; \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$. *Dann existiert* $(\varphi_m) \subset C_0^\infty(Q_T, \mathbb{R}^d)$ *mit (siehe Lemma 5.11)*

$$\begin{aligned} \varphi_m &\longrightarrow \varphi \quad \text{in} \quad L^p(0,T; \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)), \\ \varphi_m &\longrightarrow \varphi \quad \text{in} \quad L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)), \\ \varphi_m &\longrightarrow \varphi \quad \text{in} \quad L^2(Q_T, \mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Einsetzen von φ_m *und Grenzübergang ergibt*

$$\int_{Q_T} \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla \varphi \, dx + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx - \int_0^T \langle \partial_t u, \varphi \rangle \, dt$$

für alle $\varphi \in L^p(0,T; \mathring{W}^{1,p}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$. □

Im Folgenden werden wir den Druck rekonstruieren.

Satz 5.13 (Druck)
Sei $u \in L^2(0,T;\mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega,\mathbb{R}^d))$ *Lösung von (WINSP). Dann existiert* $\tilde{p} \in C^0_w(0,T;L^p(\Omega))$, $p = \frac{d+2}{d}$, *mit*

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \nabla u : \nabla\varphi \, dx\, dt &= \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla\varphi \, dx\, dt + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx\, dt \\ &\quad + \int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx\, dt + \int_\Omega u_0 \cdot \varphi(0,\cdot)\, dx + \int_{Q_T} \tilde{p}\, \partial_t \operatorname{div}\varphi \, dx\, dt\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(O_T,\mathbb{R}^d)$.

Beweis.
Sei $\varphi(t,x) = g(t)\psi(x)$ *mit* $g \in C_0^\infty(0,T)$ *und* $\psi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div}\psi = 0$. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} u \cdot \psi\, g' \, dx\, dt &= \int_{Q_T} \nabla u : \nabla\psi\, g \, dx\, dt - \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla\psi\, g\, dx\, dt - \int_{Q_T} f \cdot \psi\, g\, dx\, dt \\ &= \int_{Q_T} \nabla u : \nabla\psi\, g \, dx\, dt - \int_{Q_T} u \otimes u : \nabla\psi\, g\, dx\, dt - \int_{Q_T} \nabla F : \nabla\psi\, g\, dx\, dt \\ &=: -\int_{Q_T} Q : \nabla\psi\, g\, dx\, dt\end{aligned}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\int_0^T \left(\int_\Omega u \cdot \psi \, dx\right) g' \, dt = -\int_0^T \left(\int_\Omega Q : \nabla\psi \, dx\right) g \, dt \tag{0.27}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}\alpha(t) &:= \int_\Omega u(t,\cdot) \cdot \psi \, dx, \\ \beta(t) &:= \int_\Omega Q : \nabla\psi \, dx\end{aligned}$$

so dass wegen (0.27)

$$\int_0^T \alpha g' \, dt = -\int_0^T \beta g \, dt \tag{0.28}$$

ist für alle $g \in C_0^\infty(0,T)$. *Da* α *und* β *zur Klasse* $L^1(0,T)$ *gehören folgt hieraus*

$\alpha' = \beta$. Demnach gilt (vgl. GdV Satz 7.5)

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \beta(s)\,ds, \quad t \in (0,T). \tag{0.29}$$

Definieren wir

$$\tilde{Q}(t) := \int_0^t Q(s)\,ds$$

und folgern aus (0.29)

$$\int_\Omega \Big((u(t,\cdot) - u(0,\cdot)) \cdot \psi + \tilde{Q}(t) : \nabla\psi \Big)\,dx = 0$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div}\psi = 0$. Nach Lemma 5.12 c) ist $\tilde{Q}(t) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$, so dass wir durch Approximation

$$\int_\Omega \Big((u(t,\cdot) - u(0,\cdot)) \cdot \psi + \tilde{Q}(t) : \nabla\psi \Big)\,dx = 0 \tag{0.30}$$

für alle $\psi \in \mathring{W}^{1,p'}_{\operatorname{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ erhalten. Mit Hilfe von Lemma 3.7 folgt wie im Beweis von Satz 3.8 die Existenz von $\tilde{p}(t) \in L^p(\Omega)$ mit $\int_\Omega \tilde{p}(t)\,dx = 0$ und

$$\int_\Omega \Big((u(t,\cdot) - u(0,\cdot)) \cdot \psi + \tilde{Q} : \nabla\psi \Big)\,dx = \int_\Omega \tilde{p}(t)\,\operatorname{div}\psi\,dx \tag{0.31}$$

für alle $\psi \in \mathring{W}^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Zu zeigen belibt die schwache Stetigkeit von $\tilde{p}(t) \in L^p(\Omega)$ bezüglich t. Sei $v \in L^{p'}(\Omega)$ beliebig. Dann existiert nach Lemma 3.7 $\psi \in \mathring{W}^{1,p'}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div}\psi = v - (v)_\Omega$, so dass

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{p}(t)\,v\,dx &= \int_\Omega \tilde{p}(t)\,\big(\operatorname{div}\psi + (v)_\Omega\big)\,dx = \int_\Omega \tilde{p}(t)\,\operatorname{div}\psi\,dx \\ &= \int_\Omega \Big((u(t,\cdot) - u(0,\cdot)) \cdot \psi + \tilde{Q}(t) : \nabla\psi \Big)\,dx.\end{aligned}$$

Man beachte nun $u \in C^0_w(0,T; L^p(\Omega, \mathbb{R}^d))$ und $\tilde{Q} \in C^0(0,T; L^p(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}))$. Es folgt

$$\lim_{t\to t_0} \int_\Omega \tilde{p}(t)\,v\,dx = \int_\Omega \tilde{p}(t_0)\,v\,dx$$

für alle $v \in L^{p'}(\Omega)$, ergo $\tilde{p} \in C^0_w(0,T; L^p(\Omega, \mathbb{R}^d))$. Sei nun $g \in C_0^\infty(-\infty, T)$ und $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, so ergibt sich aus (0.31)

$$\int_\Omega \Big((u(t,\cdot) - u(0,\cdot)) \cdot g'\psi + \tilde{Q} : \nabla(g'\psi) \Big)\,dx = \int_\Omega \tilde{p}(t)\,\operatorname{div}(g'\psi)\,dx$$

für alle $t \in (0,T)$ und Integrarion über $(0,T)$ liefert

$$\int_{Q_T} u \cdot g'\psi \, dx \, dt + \int_\Omega u(0,\cdot) \cdot g(0)\psi \, dx - \int_{Q_T} Q : \nabla(g\psi) \, dx = \int_\Omega \tilde{p}(t) \, \operatorname{div}(g'\psi) \, dx.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \nabla u : \nabla\varphi \, dx \, dt = &\int_{Q_T} u \otimes u : \nabla\varphi \, dx \, dt + \int_{Q_T} f \cdot \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_{Q_T} u \cdot \varphi_t \, dx \, dt + \int_\Omega u_0 \cdot \varphi(0,\cdot) \, dx + \int_{Q_T} \tilde{p} \, \partial_t \operatorname{div} \varphi \, dx \, dt\end{aligned}$$

für alle φ der Klasse

$$Y := \operatorname{span}\left\{g\psi, \; g \in C_0^\infty(-\infty, T), \; \psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)\right\}.$$

Da diese aber dicht liegt in der Klasse $C_0^\infty(O_T, \mathbb{R}^d)$ (siehe Lemma 5.11), können wir beliebige Testfunktionen einsetzen.

Bemerkung 5.14 (Regularität)

- *Für schwache Lösungen $u \in L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d))$ von (WINSP) lassen sich unter gewissen Zuastzvoraussetzungen an die Daten folgende Regularitätsergebnisse zeigen (siehe Temam [Te], Kap. 3.5)*

  i) $u \in L^\infty(0,T; W^{2,2}(\Omega, \mathbb{R}^d))$;

  ii) $\partial_t u \in L^2(0,T; \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^d))$;

  iii) $p = \partial_t \tilde{p} \in L^\infty(0,T; W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d))$.

  Es gilt also

  $$-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = (\nabla u)u + \nabla p - f$$

  punktweise f.ü. auf Q_T.

- *Es ist immernoch ungeklärt ob C^∞-Lösungen existieren, falls alle Daten beliebig glatt sind. Dieses Problem gehört zu den 7 Millenium-Problemen, auf deren Lösung das Clay Mathematics Institute of Cambridge einen Preis von jeweils einer Million Dollar ausgesetzt hat.*

Literaturverzeichnis

[Ad] *R. A. Adams.* Sobolev Spaces. *Pure Appl. Math.* ***65****, Academic Press, New York/ London (1975).*

[Alt] *H. W. Alt.* Lineare Funktionalanalysis — Eine anwendungsorientierte Einführung. *Springer–Lehrbuch. Zweite, verbesserte Auflage, Springer Verlag, Berlin et. al. (1992).*

[La] *O. A. Ladyzhenskaya.* The mathematical theory of viscous incompressible flow. *Gorden and Breach, New York–London (1969).*

[MNRR] *J. Málek, J. Necǎs, M. Rokyta, M. Růžička.* Weak and measure valued solutions to evolutionary PDEs. *Chapman & Hall, London-Weinheim-New York (1996).*

[Mo] *C. B. Morrey.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations. *Grundl. math. Wiss.* ***130****, Springer Verlag, Berlin (1966).*

[Nau] *J. Naumann.* Vektorwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Ausarbeitung, Humboldt Universität, Berlin.*

[Te] *R. Temam.* Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. *North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford (1977).*

[Ze] *E. Zeidler.* Nonlinear Functional Analysis II/B–Nonlinear Monotone Operators. ***120****, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1990).*

Index