UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Dr. Dominic Breit

Mathematische Grundlagen der Fluid Mechanik (WS 2010/11)
Blatt 1

Aufgabe 1.

Berechnen Sie für die folgenden Verallgemeinerten Newtonschen Fluide den Hauptteil $\operatorname{div}\sigma$ der Navier-Stokes Gleichung.

a) $\sigma = |\,\varepsilon(v)|^{p-2}\,\varepsilon(v)$, $1 < p < \infty$ (Power-law Fluid)

b) $\sigma = \frac{\operatorname{ar\,sinh}(|\,\varepsilon(v)|)}{|\,\varepsilon(v)|}\,\varepsilon(v)$ (Prandtl-Eyring Fluid)

c) $\sigma = |\,\varepsilon(v)|^{p(x)-2}\,\varepsilon(v)$, $p \in C^1(\Omega, (1,\infty))$ (Elektrorheologisches Fluid)

Aufgabe 2.

a) Sei $(X;\mu)$ ein Maßraum, $1 < p < \infty$, $p' := p/(p-1)$ und $u \in L^{p'}(X;\mu)$. Die Abbildung
$$T_u : L^p(X;\mu) \to \mathbb{R},\ v \mapsto \int_X uv\,d\mu$$
gehört zur Klasse $L^p(X,\mu)^*$ mit
$$\|T\|_\infty := \sup_{\|v\|_p \le 1} T_u(v) = \|u\|_{p'}.$$

b) Zeigen Sie im Fall $\mu(X) < \infty$: Für alle Exponenten p, q mit $1 \le p \le q < \infty$ ist $L^q(X;\mu) \subset L^p(X;\mu)$. In diesem Fall gilt:
$$\|u\|_p \le \|u\|_q\,\mu(X)^{1/p-1/q} \quad \text{für alle} \quad u \in L^p(X;\mu).$$
Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Inklusion $L^q \subset L^p$ im Falle $\mu(X) = \infty$ allgemein falsch ist.

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Funktion $u(x) = |x|^\alpha$, $1 \leq p < \infty$ und $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$, $R > 0$. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass

- $u \in L^p(B_R(0))$;
- $u \in L^p(\mathbb{R}^d \backslash B_R(0))$;
- $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie die Funktion $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$. Untersuchen Sie u auf schwache Differenzierbarkeit, und bestimmen Sie ggf. die schwache Ableitung w von u. Wird w (sofern existent) von der f. ü. existierenden klassischen Ableitung u' erzeugt? Besitzt u eine zweite schwache Ableitung?
