UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Dr. Dominic Breit

Mathematische Grundlagen der Fluid Mechanik (WS 2010/11)
Blatt 3

Aufgabe 9.

a) Beweisen Sie die Korn'sche Ungleichung: für $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, gilt

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq 2 \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2 \, dx.$$

Nehmen Sie zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ an und integrieren Sie partiell.

b) Ist $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $\partial\Omega$ glatt, so gilt für alle $\omega \Subset \Omega$, $\partial\omega$ glatt,

$$\int_\omega |\nabla u| \, dx \leq \frac{c}{\text{dist}\,(\omega, \partial\Omega)^2} \int_\Omega |u|^2 \, dx + 2 \int_\Omega |\varepsilon(u)|^2 \, dx.$$

(Hinweis: Wählen Sie eine passende Abschneidefunktion.)

Aufgabe 10.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit.

a) Zeigen Sie die eindeutige Existenz einer Lösung $u \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ von

$$\int_\Omega \mathcal{A}(\varepsilon(u), \varepsilon(\varphi)) \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

b) Zeigen Sie: Ist $f \in W^{k,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, so gehört die Lösung aus a) zur Klasse $W^{k+1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 11.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $u_0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} u_0 = 0$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein $u \in u_0 + \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}_{div}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

(Hinweis: betrachten Sie $v := u - u_0$.)