UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Dr. Dominic Breit

Mathematische Grundlagen der Fluid Mechanik (WS 2010/11)
Blatt 4

Aufgabe 12.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und $p \geq \frac{12}{7}$. Gegen sei die Abbdilung

$$A : \mathring{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \to \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

mit

$$\int_\Omega u \otimes u : \nabla\varphi = \langle Au, \varphi\rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Zeigen Sie.

a) Falls $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ist, gilt $\langle Au, u\rangle = 0$.

b) A ist stetig.

c) Für $p > \frac{12}{7}$ ist A kompakt.

Aufgabe 13.

Es gelte

$$2\mu_1^3\rho^2\nu^{-2}\|f\|_2 < 1,$$

wobei μ_1 die optimale Konstante in der Soboelv-Ungleichung $\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^4(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist. Zeigen Sie, dass schwache Lösungen der Navier-Stokes Gleichung eindeutig sind.

Aufgabe 14.

Sei $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ Lösung von (WNSP). Zeigen Sie: es existiert genau eine Druckfunktion $p \in L^2_0(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega u \otimes u : \varphi \, dx + \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 15.

Zeigen Sie den Übergang vom Powell-Eyring Modell zum Prandtl-Eyring Modell. Gegeben sei eine Folge Funktion $(u^n) \subset \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ von Lösungen von

$$\frac{1}{n} \int_\Omega \varepsilon(u) : \varepsilon(\varphi) \, dx + \int_\Omega \sigma(\varepsilon(u)) : \varepsilon(\varphi) \, dx = \int_\Omega f \cdot u \, dx$$

für alle $\varphi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Dabei ist $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und

$$\sigma(\varepsilon) = DW(\varepsilon), \quad W(\epsilon) = |\varepsilon| \ln(1 + \varepsilon).$$

Zeigen Sie:

a) $D^2 W$ ist beschränkt.

b) $|DW(\xi) - DW(\eta)| \leq c|\xi - \eta|$ für ale $\eta, \xi \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

c) Es gelte $u_n \to u$ in $\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Welche Gleichung erfüllt u?

d) Ist u^n in $\mathring{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ automatisch beschränkt? Benutzen Sie u^n als Testfunktion.

Aufgabe 16.

Gegeben sei die Integralgleichung

$$u(x) = \int_0^1 k(x, u(y)) \, dy$$

auf $C^0[0,1]$ mit einer Funktion $k : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. k sei stetig in x und kontrahierend in u. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung mit Hilfe des Leray-Schauder Prinzips. (Hinweis: Satz von Arcela-Ascoli.)
