UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Dr. Dominic Breit

Mathematische Grundlagen der Fluid Mechanik (WS 2010/11)
Blatt 5

Aufgabe 17.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und $T > 0$. Zeigen Sie.

a) Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q_T)$. (Hinweis: L^p-Approximation durch Treppenfunktionen.)

b) Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, so ist auch $L^p(0,T;X)$ ein Banachraum zusammen mit der Norm

$$\|w\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|w(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

c) Ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, so ist auch $L^2(0,T;H)$ ein Hilbertraum zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle w, v\rangle_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T \langle w(t), v(t)\rangle_H \, dt.$$

Aufgabe 18.

Sei $K : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$K(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

Zeigen Sie.

a) Die Funktion K löst auf ihrem Definitonsbereich die Gleichung

$$\partial_t u = \Delta u.$$

b) $\int_{\mathbb{R}^d} K(t,x)\, dx = 1$ für alle $t > 0$.

c) Für jedes $\delta > 0$ ist

$$\lim_{t\to 0} \int_{|x|\geq\delta} K(t,x)\, dx = 0.$$

Aufgabe 19.

a) Sei $u_m : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}$) gegeben durch $u_m(x) := \sin(mx)$. Zeigen Sie:

   i) $u_m \rightharpoonup 0$ in $L^p[0, 2\pi]$ für alle $p \in [1, \infty)$.
   (Hinweis: benutzen Sie, dass jedes stetig-lineare Funktional Φ auf $L^p[0, 2\pi]$ die Darstellung $\Phi(u) = \int_0^{2\pi} uv\, dx$ mit einer $L^{p'}[0, 2\pi]$-Funktion v hat sowie $\lim_m \int_0^{2\pi} u_m\varphi\, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty[0, 2\pi]$.)

   ii) $u_m \not\rightharpoonup 0$ in $L^\infty[0, 2\pi]$.
   (Hinweis: betrachten Sie Punktauswertungen von u_m.)

   iii) Welche Aussage können Sie über starke Konvergenz von u_m treffen?

b) Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Entscheiden Sie über starke und schwache Konvergenz der Folge (x_k).

Aufgabe 20.

Sei X ein Banachraum, $T > 0$ und $1 \leq p < \infty$. Der Steklov-Durchschnitt ist definiert durch

$$u_h(t) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)\, ds, \quad u \in L^p(0, T; X),$$

für $h > 0$ und $0 \leq t < T - h$. Zeigen Sie

a) $\|u_h\|_{L^p[0,T-h]} \leq \|u\|_{L^p[0,T]}$ für alle $u \in L^p(0, T; X)$ und alle $h > 0$.

b) Sei $u \in C(0, T; X)$, dann gilt $u_h \to u$ in $L^p_{loc}(0, T; X)$.

c) $u_h \to u$ in $L^p_{loc}(0, T; X)$ für alle $u \in L^p(0, T; X)$.

(Hinweis: benutzen Sie, dass $C(0, T; X) \subset L^p(0, T; X)$ dicht ist.)
