UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK

Dr. Dominic Breit

Mathematematische Grundlagen der Fluid Mechanik (WS 2010/11)
Blatt 6

Aufgabe 21.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und (ω_r) ONB des $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie.

a) Die Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \omega_r \, dx = \int_\Omega f \cdot \omega_r \, dx, \quad r = 1, ..., N$$

besitzt eine Lösung $u^N \in X^N := \operatorname{span}\{\omega_1, ..., \omega_N\}$.

b) Die Folge (u^N) ist beschränkt in $\mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

c) Der schwache Limes $u \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ (einer Teilfolge) von u^N löst die Gleichung

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \cdot \phi \, dx \quad \text{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Aufgabe 22.

Sei $u \in L^2(0, T; \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d))$ mit

$$\int_{Q_T} u \partial_t \phi \, dx \, dt \leq \int_0^T \|H\|_2 \|\nabla \phi\|_2 \, dt$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(Q_T)$ mit einer Funktion $H \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

a) Zeigen Sie $\partial_t u \in L^2(0, T; \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d)^*)$.

b) Für den Steklov-Durchschnitt u_h $(h > 0)$ ist

$$\int_\Omega \partial_t(u_h) \cdot \phi \, dx = \langle (\partial_t u)_h, \phi \rangle \quad \text{für alle } \phi \in \mathring{W}^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

c) Für fast alle $0 \leq t_1 \leq t_2 < T$ ist

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \partial_t u, u \rangle \, dt = \int_\Omega (u(t_1, \cdot) - u(t_2, \cdot)) \, dx.$$

Aufgabe 23. Gegeben sei die Funktion $u(t, x) := |x|^{-t\alpha}$, $\alpha > 0$ auf $[0, T] \times B_1$. Hierbei bezeichnet B_1 die Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Bestimmen Sie α so, dass

a) $u \in L^2(Q_T, \mathbb{R}^d)$;

b) $u \in L^2(0, T; \mathring{W}^{1,2}_{\text{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d))$;

a) $\partial_t u \in L^2(Q_T, \mathbb{R}^d)$;

b) $\partial_t u \in L^2(0, T; \mathring{W}^{1,2}_{\text{div}}(\Omega, \mathbb{R}^d))$.

Aufgabe 24.

Zeigen Sie die Existenz einer starken Lösung der instationären Navier-Stokes Gleichung, d.h. $(u, p) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ mit

$$-\partial_t u + \Delta u = (\nabla u)u + \nabla p - f.$$
