Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
10. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 25. Juni 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (2+4=6P)

a) Es seien Γ_1 und Γ_2 zwei Zyklen in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie für alle $z \notin \mathrm{Spur}(\Gamma_1) \cup \mathrm{Spur}(\Gamma_2)$ und $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$\eta(k\,\Gamma_1 + l\,\Gamma_2, z) = k\,\eta(\Gamma_1, z) + l\,\eta(\Gamma_2, z).$$

b) Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C} - \{0\}$ mit $\eta(\Gamma, 0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt keine Folge von Polynomfunktionen, die auf $\mathrm{Spur}(\Gamma)$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$ konvergiert.

Aufgabe 2 (10P)

Für $R \in (0, \infty) - \{1\}$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ seien $\gamma_{k,l} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Wege $\gamma_k(t) = e^{kit}$ und $\gamma_l(t) = Re^{lit}$. Berechnen Sie $\eta(\Gamma, 0)$ für den Zyklus $\Gamma = [\![\gamma_k + \gamma_l]\!]$.

Aufgabe 3 (3+4+4+3=14P)

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $z_0 \in U$. Die Menge

$$V(z_0) := \big\{ z \in U \;:\; \exists \gamma \in C\big([0,1], U\big) \text{ mit } \gamma(0) = z_0 \text{ und } \gamma(1) = z \big\}$$

heißt *Zusammenhangskomponente (der Menge U) von z_0*. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

i) $V(z_0)$ ist offen und zusammenhängend;

ii) Je zwei Zusammenhangskomponenten sind entweder disjunkt oder gleich;

iii) U hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten;

iv) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann hat $\mathbb{C} - K$ genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Aufgabe 4 (5+2+3=10P)

Es sei Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}$. Wir nennen die Menge

$$\mathrm{Int}(\Gamma) := \big\{ z \in \mathbb{C} - \mathrm{Spur}(\Gamma) \;:\; \eta(\Gamma, z) \neq 0 \big\}$$

das Innere von Γ. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Int}(\Gamma)$ ist eine offene und beschränkte Menge.

b) Ein Zyklus Γ ist genau dann nullhomolog in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, wenn $\mathrm{Int}(\Gamma) \subset U$.

c) Im Allgemeinen gilt nicht $\mathrm{Spur}(\Gamma) = \partial\,\mathrm{Int}(\Gamma)$.