Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
11. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 02. Juli 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (8+4=12P)

a) Berechnen Sie die Laurententwicklung von $f(z) = \dfrac{5}{(z-i)(z-2)}$ auf dem Kreisring $K(0,r,R)$ für

i) $r = 0,\ R = 1$; ii) $r = 1,\ R = 2$; iii) $r = 2,\ R = \infty$.

b) Bestimmen Sie für $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|} z^n$ einen möglichst großen Kreisring $K(0,r,R)$, auf dem diese Laurentreihe konvergiert.

Aufgabe 2 (4×2=8P)

Bestimmen Sie jeweils die Laurentreihe auf dem angegbenen Kreisring:

a) $f_1(z) = \dfrac{1}{z}$ auf $K(i,1,\infty)$

b) $f_2(z) = \dfrac{\sinh z}{(z-1)^2}$ auf $K(1,0,1)$

c) $f_3(z) = \dfrac{4}{(1-z)^2}$ auf $K(0,0,1)$

d) $f_4(z) = \dfrac{z^3 - 2iz^2}{(z-i)^2}$ auf $K(i,1,\infty)$

Aufgabe 3 (2+5+1=8P)

Sei $a \in \mathbb{C}$ und f holomorph auf $K(a,0,R)$ für ein $R > 0$. Ferner sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ die Laurentreihendarstellung von f auf $K(a,0,R)$. Beweisen Sie: Die Singulariät in a ist...

i) ... hebbar genau dann, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$;

ii) ... ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$;

iii) ... eine wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Aufgabe 4 (2+2+4+4=12P)

Finden und klassifizieren Sie alle Singularitäten der nachfolgenden Funktionen. Geben Sie für Polstellen jeweils deren Ordnung an!

a) $f_1(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}$

b) $f_2(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 1}{z^6 - 2z^3 + 1}$

c) $f_3(z) = \dfrac{1}{\sin z}$

d) $f_4(z) = \tan^2 z$