Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
2. Übungsblatt

Abgabe: Bis Mittwoch, den 02. Mai 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (4×3=12P) Bestimmen Sie alle Punkte im jeweiligen Definitionsbereich, an denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x+iy \mapsto y^2 \sin x + iy$

b) $f_2 : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C},\ x+iy \mapsto \dfrac{x}{y} + ixy$

c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x+iy \mapsto x^2 - iy^2$

d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ x+iy \mapsto x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Aufgabe 2 (8P) Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offene Mengen und $f : U \to V$ eine bijektive holomorphe Funktion mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Zeigen Sie, dass dann die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls holomorph ist mit

$$\big(f^{-1}\big)'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)} \quad \text{für alle } w \in V.$$

Hinweis: Verwenden Sie den *Umkehrsatz* für reell differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (8P) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} f = \text{const.} \\ \vee\ f(U) \subset \mathbb{R} \\ \vee\ \overline{f} \text{ ist holomorph} \\ \vee\ |f| \text{ ist holomorph} \end{array}\right\} \Longrightarrow\ f = \text{const.}$$

Aufgabe 4 (4+8=12P) Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der *Laplacegleichung* genügt:

$$\Delta h(x,y) := \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch sind.

b) Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass es dann eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x+iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph ist.