Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
3. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 07. Mai 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (8 × 1+2=10P)

a) Es sei $\log : \mathbb{C} - (\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Berechnen Sie:

i) $\log i$ ii) $\cos\big(\log(2)i\big)$ iii) $\log\big(e^{1+\frac{9}{2}\pi i}\big)$ iv) $\tanh\big(\log\big(\frac{1}{3i}\big)\big)$

v) $\big(i(i-1)\big)^i$ vi) $i^i(i-1)^i$ vii) π^{ei} viii) $\log\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\big)$

b) Erklären Sie genau, was bei dem folgenden "Beweis" schief geht:

$$e = e^{1+2\pi i} \;\Rightarrow\; e^{1+2\pi i} = e^{(1+2\pi i)^2} \;\Rightarrow\; e = e^{1-4\pi^2+4\pi i} \;\Rightarrow\; e = e^{1-4\pi^2}.$$

Aufgabe 2 (10P)

Es sei $\log : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\arctan(w) := \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-w}{i+w}\right)$$

das Gebiet $G = \mathbb{C} - \big\{iy \,:\, |y| \geq 1\big\}$ auf den Streifen $S = \big\{z \in \mathbb{C} \,:\, -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\big\}$ abbildet und dass für alle $w \in G$ gilt:

$$\tan\big(\arctan(w)\big) = w.$$

Aufgabe 3 (4+6=10P)

a) Für alle $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ sei $a_n \in \mathbb{C} - \{0\}$ und R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

i) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k$ b) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$ c) $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$

Aufgabe 4 (5+5=10P) Es sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$ eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion definiert wird.

b) Gibt es eine auf $\mathbb{D}$ komplex analytische Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{k^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}?$$