Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
5. Übungsblatt

Abgabe: Bis Dienstag, den 22. Mai 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (6+6=12P) Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt *Elementargebiet*, wenn jede auf G holomorphe Funktion eine komplexe Stammfunktion besitzt.

a) Beweisen Sie: Sind G_1 und G_2 Elementargebiete mit *nichtleerem und zusammenhängendem* Schnitt $G_1 \cap G_2$, so ist $G_1 \cup G_2$ ebenfalls ein Elementargebiet.

b) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Elementargebiete? Begründen Sie!

i) $G_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ii) $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} - \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

iii) $G_3 = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$

Aufgabe 2 (4+3,5+1,5+1=10P) Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f : D_R(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\} \to \mathbb{C}$ die Funktion $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$.

a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-a)^{k+1}$ auf $D_R(a)$ konvergiert und dass die durch sie dargestellte Funktion $F : D_R(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion von f ist.

b) Es sei $0 < r < R$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ der Weg $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$. Beweisen Sie die Formel

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \, \mathrm{d}z$$

c) Folgern Sie aus b) die Abschätzung

$$|a_k| \leq \frac{\sup_{\theta \in [0,2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|}{r^k}.$$

d) Folgern Sie aus c): Ist $R = \infty$ und ist f beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 3 (6+4=10P)

a) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner seien $\gamma, \gamma_n : [0,1] \to U$ $(n \in \mathbb{N})$ Wege mit $\sup\limits_{t \in [0,1]} |\gamma_n(t) - \gamma(t)| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\gamma_n} f \, \mathrm{d}z \to \int_\gamma f \, \mathrm{d}z \qquad \text{für } n \to \infty.$$

b) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ der Weg $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Zeigen Sie, dass durch

$$f : \mathbb{C} - \partial D_1(0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}w$$

eine holomorphe Funktion gegeben ist, und bestimmen Sie $f'(z)$.

Aufgabe 4 (4×2=8P) Für $R > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei $\gamma_R(z_0) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ der Weg $\gamma_R(z_0)(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$. Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

i) $$\int\limits_{\gamma_2(0)} \frac{z^2(z^2-1)}{\sqrt{2} - z} \,\mathrm{d}z$$

ii) $$\int\limits_{\gamma_{3/2}(i)} \frac{1}{z^2+1} \,\mathrm{d}z$$

iii) $$\int\limits_{\gamma_{3/2}(1)} \frac{1}{z^2+1} \,\mathrm{d}z$$

iv) $$\int\limits_{\gamma_3(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} \,\mathrm{d}z$$