Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
6. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 28. Mai 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (3+1+6+3+1=14P)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zwei Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to G$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = a$ und $\alpha(1) = \beta(1) = b$ heißen *homotop in* G, wenn es eine stetige Abbildung $H : Q := [0,1] \times [0,1] \to G$ gibt mit

i) $H(0,t) = \alpha(t)$ für $t \in [0,1]$,

ii) $H(1,t) = \beta(t)$ für $t \in [0,1]$,

iii) $H(s,0) = a$ und $H(s,1) = b$ für $s \in [0,1]$.

Zeigen Sie:

a) Ist G konvex, so sind je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop in G. Insbesondere ist jeder geschlossene Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ homotop zum konstanten Weg $\beta(t) \equiv \alpha(0)$.

b) $H\big|_{\partial Q} : \partial Q \to G$ ist ein geschlossener Weg in G.

c) Für $k, l \in \{1, ..., n\}$ sei durch

$$Q_{kl}^n := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \times \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]$$

eine Zerlegung von Q in n^2 Teilquadrate definiert. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und $k, l \in \{1, ..., n\}$ das Bild $H(Q_{kl}^n)$ in einer Kreisscheibe in G enthalten ist.

d) Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und $n \geq N$ gilt:

$$\int_{H|_{\partial Q}} f \, \mathrm{d}z = \sum_{kl} \int_{H|_{\partial Q_{kl}^n}} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

e) Folgern Sie: Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und sind die Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to G$ homotop in G, so gilt

$$\int_\alpha f \, \mathrm{d}z = \int_\beta f \, \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 2 (7P) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ heißt *kompakt konvergent* gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ die Einschränkungen $f_n\big|_K$ gleichmäßig gegen $f\big|_K$ konvergieren. Zeigen Sie: Der punktweise Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist holomorph. Belegen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass diese Aussage für Folgen reell differenzierbarer Funktionen i. A. falsch ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera.

Aufgabe 3 (8P) Es sei $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z) - f(w)| \leq \delta < \infty$ für alle $z, w \in D_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann

$$|f'(0)| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Hinweis: Wenden Sie die Cauchysche Integralformel auf $f(z)$ und auf $\widetilde{f}(z) := f(-z)$ an.

Aufgabe 4 (7+4=11P)

a) Es sei $U := D_1(0) - \{0\}$. Welche der folgenden Funktionen $f_k : U \to \mathbb{C}$ lassen sich holomorph in den Punkt $z = 0$ fortsetzen?

i) $f_1(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$ ii) $f_2(z) = \dfrac{\cos(z)}{1 - e^{z^2}}$ iii) $f_3(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

b) Es sei $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ der Weg $\gamma(t) := \begin{cases} e^{it}, & 0 \leq t < 2\pi, \\ 2 - e^{2i(2\pi - t)}, & 2\pi \leq t \leq 4\pi. \end{cases}$

i) Skizzieren Sie die Spur von γ.

ii) Berechnen Sie die Windungszahl $w(\gamma, z)$ für $z = -2,\ 0,\ 2$.