Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
7. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 04. Juni 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (4+3=7P)

a) Beweisen Sie die folgende komplexe Variante der *de l'Hospitalschen Regel*: Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $f, g : D_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z), g(z) \neq 0$ für $z \in D_r(a) - \{a\}$. Haben dann f und g im Punkt a die gleiche Nullstellenordnung $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, so ist die Funktion $\frac{f(z)}{g(z)}$ holomorph in a fortsetzbar und es gilt

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}.$$

b) Eine Version des *Identitätssatzes* besagt: *Ist G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G mit $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0 \in G$ sodass $z_n \neq z_0$ und $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt* $f \equiv 0$. Zeigen Sie, dass man dabei auf die Voraussetzung "$z_0 \in G$" nicht verzichten kann.

Aufgabe 2 (4+5=9P) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Liouville:

a) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$.

b) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *doppeltperiodisch*, wenn es komplexe Zahlen $u, v \in \mathbb{C} - \{0\}$ mit $\frac{u}{v} \notin \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(z + u) = f(z + v) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie: Jede holomorphe doppeltperiodische Funktion ist konstant.

Aufgabe 3 (6+5+3=14P) Im Folgenden bezeichne $P(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Zeigen Sie:

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein Polynom vom Grad $k > 0$,

(ii) Es gibt $a, b > 0$ und $R > 0$ sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$

$$a|z|^k \leq |f(z)| \leq b|z|^k \quad \text{für ein } k > 0.$$

b) Das Bild $P(\mathbb{C})$ ist abgeschlossen.

c) Folgern Sie aus *b)* den *Fundamentalsatz der Algebra*: Für $k > 0$ gilt $0 \in P(\mathbb{C})$.

Hinweis: Verwenden Sie den *Satz von der Gebietstreue*.

Aufgabe 4 (4+6=10P)

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Gibt es eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $z \in G$

$$\operatorname{Im} f(z) = G\big(\operatorname{Re} f(z)\big)$$

gilt, so ist f konstant.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie, dass dann $|f(z)|$ jeden positiven Wert annimmt.