Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
8. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 11. Juni 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (4+3+3=10P) Für $r > 0$ sei $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Die Funktion $f : D_1 \to \mathbb{C}$ sei holomorph und erfülle $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D_1$ sowie $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $g : D_1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$ ist holomorph und besitzt die Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}$, wobei $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$.

b) Für alle $0 < r < 1$ gilt: $\sup\limits_{z \in D_r} |g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$.

c) Folgern Sie aus b): Für alle $z \in D_1$ gilt $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$.

Aufgabe 2 (5+5=10P)

a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ sei stetig auf $\overline{G}$ und holomorph auf G. Weiter sei $|f|$ auf ∂G konstant. Zeigen Sie: f besitzt eine Nullstelle in G oder f ist konstant.

b) Es sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f : \overline{H} \to \mathbb{C}$, die auf $\mathbb{H}$ holomorph und unbeschränkt, auf $\partial\mathbb{H}$ jedoch beschränkt ist. Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Maximumprinzip?

Aufgabe 3 (2+4×2=10P)

a) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ($\cong \mathbb{R}^2$) offen und $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ harmonisch (vgl. Aufgabe 4 a) auf Blatt 2). Zeigen Sie, dass f die Mittelwerteigenschaft (MWE) besitzt.

b) Welche der folgenden Funktionen besitzen die MWE? Begründen Sie!

i) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|^2$ ii) $f_2 : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \ln|z|$

iii) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ iv) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $z \mapsto \cos(\operatorname{Re} z)$

Aufgabe 4 (10P) Für eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die nicht identisch verschwindet, und $r > 0$ sei $M_f(r) := \max\limits_{|z| \leq r} |f(z)|$. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist transzendent (d.h. kein Polynom)} \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln\big(M_f(r)\big)}{\ln(r)} = \infty.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 a) von Blatt 7.