Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Jan Müller

Funktionentheorie (SS 2018)
9. Übungsblatt

Abgabe: Bis Montag, den 18. Juni 12:00 Uhr in Briefkasten 047 in Geb. E 2.5.

Aufgabe 1 (10P) Zeigen Sie Satz 6.3 aus der Vorlesung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann Gilt:

$$f \equiv 0 \text{ auf } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine offene Menge } U \neq \emptyset \text{ in } \Omega \text{ mit } f \equiv 0 \text{ auf } U.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Menge $\Omega_0 := \big\{ z \in \Omega \,:\, \exists \text{ offene Umg. } V \text{ von } z \text{ mit } f \equiv 0 \text{ auf } V \big\}$ sowohl offen als auch abgeschlossen in der Relativtopologie* von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist. Da Ω nach Vor. zusammenhängend ist, folgt daraus $\Omega_0 = \Omega$ oder $\Omega_0 = \emptyset$.

Aufgabe 2 (10P) Zeigen Sie Satz 6.5 aus der Vorlesung: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch.

i) Hat f im Inneren von Ω ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

ii) Ist $\overline{\Omega}$ kompakt und f stetig auf $\overline{\Omega}$, so nimmt f sein Maximum und sein Minimum auf $\partial\Omega$ an.

Hinweis zu i): Sei $z_0 \in \Omega$ ein lokales Extremum von f. Folgern Sie aus der MWE harmonischer Funktionen, dass f konstant auf einer Kreisscheibe $D_R(z_0) \subset \Omega$ ist und wenden Sie Aufgabe 1 an.

Aufgabe 3 (10P) Zeigen Sie Satz 6.6 a) aus der Vorlesung: Sei $f : \overline{D_R(0)} \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf $D_R(0)$. Dann gilt für $z \in D_R(0)$

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(w_t) P_R(w_t, z)\,\mathrm{d}t,$$

wobei

$$w_t := Re^{it} \qquad \text{und} \qquad P_R(w, z) := \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - w|^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für eine Folge h_n positiver reeller Zahlen mit $h_n \uparrow 1$ für $n \to \infty$ die Funktionenfolge $f_n : \overline{D_R(0)} \to \mathbb{R}$, $f_n(z) := f(h_n z)$.

Aufgabe 4 (4+4+2=10P) Es seien $\gamma_{1,2,3} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ die Wege

$$\gamma_1(t) = -2t, \qquad \gamma_2(t) = 1 - e^{\pi i t}, \qquad \gamma_3(t) = 2e^{\pi i t}.$$

a) Berechnen Sie $\big(-2[\![\gamma_1]\!] + 3[\![\gamma_2]\!] + [\![\gamma_3]\!] \big)(f)$ für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := (1 - z)^2$.

b) Welche der folgenden Ketten sind Zykel? Begründen Sie!

i) $2[\![\gamma_1]\!] + [\![\gamma_2]\!] - 3[\![\gamma_3]\!]$ ii) $[\![\gamma_1]\!] + [\![\gamma_2]\!] + [\![\gamma_3]\!]$ iii) $-2[\![\gamma_1]\!] - 2[\![\gamma_2]\!] + 2[\![\gamma_3]\!]$

c) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\alpha_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$ der Weg $\alpha_k(t) = e^{2k\pi i t}$. Zeigen Sie: $[\![\alpha_k]\!] = k\,[\![\alpha_1]\!]$.

---

*Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist das Mengensystem $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \,:\, U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y, die sog. *Relativ-* oder *Teilraumtopologie*.