Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs

Funktionenräume (SoSe 2013)
Blatt 2

Aufgabe 1

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-messbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $u \in L^\infty(\Omega)$, so ist $||u||_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} ||u||_p$.

(b) Ist $u \in L^p(\Omega)$ für alle $p \in [1,\infty)$ und gibt es eine Konstante $K \in [0,\infty)$ so, dass

$$||u||_p \le K \text{ für alle } p \in [1,\infty)$$

gilt, so ist $u \in L^\infty(\Omega)$ und $||u||_\infty \le K$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass allgemein nicht $||u||_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} ||u||_p$ gilt.

Aufgabe 2

Seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, wobei $(Y, ||\cdot||_Y)$ vollständig sei, $X_0 \subset X$ ein dichter Unterraum und $T \in \mathfrak{L}(X_0, Y)$ ein stetiger linearer Operator. Beweisen Sie, dass es dann genau einen Operator $\overline{T} \in \mathfrak{L}(X, Y)$ mit $\overline{T}|_{X_0} = T$ gibt.

Aufgabe 3

Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und sei $X := (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift

$$I(x)(y) := I_x(y) := \sum_{k=1}^n x_k y_k \;\; (x = (x_k), y = (y_k) \in \mathbb{R}^n)$$

eine lineare Abbildung $I : X \to X^*$ erklärt wird.

(b) Zeigen Sie, dass auch

$$||x||^* := ||I_x|| \;\; (x \in \mathbb{R}^n)$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, die man die zu $||\cdot||$ duale Norm nennt, und dass durch $I : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||^*) \to X^*$ ein isometrischer Isomorphismus gegeben ist.

(c) Bestimmen Sie für $1 \leq p \leq \infty$ die duale Norm zu

$$||x||_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{k=1}^{n} |x_k|, & p = \infty \end{cases}.$$

Hierbei ist $x = (x_k) \in \mathbb{R}^n$.

Abgabe: freiwillig bis Freitag, den 07.06. um 8:30 Uhr in den Übungen