Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Höhere Mathematik für Ingenieure I, Blatt 10

Aufgabe 1. (3+2 Punkte)

i) Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$a) \quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b) \quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Kann man den Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ schreiben?

ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Finden Sie dann zu einem beliebigen Vektor

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)}$.

Aufgabe 2. (je 1 Punkt) Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$)?

$$i) \ \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \|\underline{\mathbf{x}}\| < 1\}, \quad ii) \ \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$iii) \ \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}, \quad iv) \ \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3^2 = 0\},$$

$$v) \quad \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Aufgabe 3. (3+2 Punkte)

i) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert. Sind die folgenden Vektoren linear unabängig?

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Finden Sie eine Basis des Raums $V := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = x_2\}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (3+2 Punkte)

i) Für beliebiges reelles α und in den beiden Fällen $\beta = 0$ bzw. $\beta = 1$ sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & \alpha x_3 & + & x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachtet. Besitzt das System jeweils eine eindeutige Lösung (man berechne diese), mehrere Lösungen (wie sehen diese aus?), keine Lösung?

ii) Ist die Menge der Lösungen jeweils ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ und wenn ja, welche Dimension hat dieser?

Abgabe: Bis Donnerstag, 20.01.2011, 14.00 Uhr, Briefkästen (direkt vor dem Geschäftszimmer), Geb. E2 4.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/HMI1/hmi1.html