UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure I

Wintersemester 2012/13

Blatt 8 Abgabetermin: bis Donnerstag, 20.12.2012, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (1+1+1=3 Punkte)

Wir betrachten die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $a_n = a_{n+m}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und bestimmen Sie $M = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Geben Sie zu jedem $a \in M$ eine Teilfolge $\{\tilde{a}_j\}$ von $\{a_n\}$ an mit $\tilde{a}_j = a$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Begründen Sie Ihre Aussage.

(c) Gibt es auch eine konvergente Teilfolge $\{\tilde{a}_j\}$ von $\{a_n\}$ mit $\{\tilde{a}_j;\ j \in \mathbb{N}\} = M$? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2 (1,5+1,5=3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jede konvergente reelle Zahlenfolge eine Cauchy-Folge ist. (Dieser Teil des Kriteriums von Cauchy kann elementar und ohne Verwendung der Vollständigkeit der reellen Zahlen bewiesen werden.)

(b) Sei $\{a_n\}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ genau einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 3 (4×1,5=6 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt eine beschränkte Folge $\{a_n\}$ mit den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.

(b) Es gibt eine unbeschränkte Folge $\{a_n\}$ mit den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.

(c) Es gibt eine monotone Folge $\{a_n\}$ mit den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.

(d) Es gibt eine Cauchy-Folge $\{a_n\}$ mit den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.
(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 (b).*)

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(2+1,5+1,5=5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}}$ konvergieren, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Beweisen Sie OHNE Verwendung des Quotientenkriteriums, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konvergiert. Zeigen Sie dazu zunächst, dass $k! \geq 2^{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, und schätzen Sie dann die Partialsummen mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe ab.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/HMI1_12_13/Ueb/uebhmi1